

PHYSIK

Wurfbewegungen

2

Waagerechter Wurf

Datei Nr. 91122

Ausführliche Lösungen und Ausdruckmöglichkeit nur auf der Mathematik-CD.

Diese Datei ist noch unkorrigiert

Friedrich W. Buckel

August 2002

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

1	Grundlagen zum waagerechten Wurf	1
2	Bahnkurve zum waagerechten Wurf	3
3	Geschwindigkeiten entlang der Bahn	5
4	Umfassende Aufgaben	8
5	Ausführliche Lösungen	10-25

Bemerkung

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Formel (im Volksmund auch „Mitternachtsformel“ genannt, wird von mir ausschließlich verwendet. In nicht wenigen Aufgaben ist sie der leider zu oft eingesetzten p-q-Formel deutlich überlegen.

Waagerechter Wurf

1. Grundlagen

Ein waagerechter Wurf entsteht durch Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in horizontaler Richtung und dem freien Fall (senkrecht dazu).

Physikalische Experimente zeigen, daß sich diese Bewegungen ungestört überlagern, so daß man die Gleichungen für jede der Bewegungen dann benutzen kann, wenn sie nützlich sind.

Einführung eines Koordinatensystems:

Die x-Achse zeige in Abwurfrichtung, also horizontal, die y-Achse vertikal nach unten, also in Richtung des freien Falls.

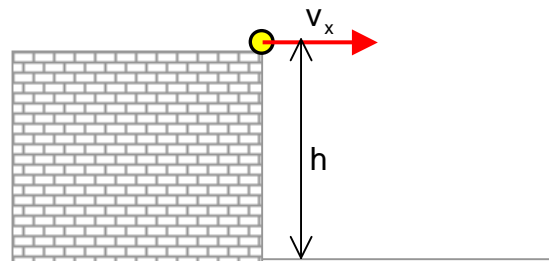
Somit erhält man vier Bewegungsgleichungen, zwei für die Koordinate des Aufenthaltsortes und zwei für die Geschwindigkeit der beiden Teilbewegungen:

$$\begin{aligned} \text{In x-Richtung (gleichförmig):} \quad & v_x = v_0 \\ & x = v_0 \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In y-Richtung (freier Fall):} \quad & v_y = g \cdot t \\ & y = \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Einfachste Anwendungsbeispiele dazu:

- (1) Eine Kugel wird horizontal mit $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ abgestoßen. Nach welcher Zeit schlägt sie auf dem $h = 0,8 \text{ m}$ tiefen Boden auf? Wie weit fliegt sie dabei hinaus?



Die ungestörte Überlagerung bedeutet, daß die Fallbewegung nicht durch die gleichförmige Bewegung in x-Richtung gestört wird. Der Körper kommt also in derselben Zeit unten an, wie wenn er nur fallen würde. (Da gibt es nette Experimente dazu, wo gleichzeitig zwei Kugeln in Bewegung gesetzt werden, die eine fällt nur, die andere führt einen waagerechten Wurf durch. Beide kommen zur selben Zeit unten an!)

Aus der Höhe berechnen wir die Flugdauer:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{1,6 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{0,16} \text{ s} = 0,4 \text{ s}$$

So lange fliegt also der Körper (auch horizontal!). Dabei legt er in x-Richtung die Strecke $s = v_0 \cdot t = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,4 \text{ s} = 0,8 \text{ m}$ zurück.

- (2) Eine Kugel wird horizontal mit $v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ abgeschossen und fliegt 6 m weit hinaus (in x-Richtung meint man damit), bis sie unten aufschlägt.

Aus welcher Höhe wurde sie abgeschossen ?

Nun müssen wir mit der gleichförmigen Bewegung arbeiten. Wir kennen die Wegstrecke horizontal gemessen mit $x = 6 \text{ m}$ und setzen ein:

$$x = v_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0} = \frac{6 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,5 \text{ s}$$

Damit berechnen wir die Fallstrecke. Wir verwenden also diese Zeit für die andere Bewegung, den freien Fall, der ja genauso lange dauert:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1,5 \text{ s})^2 = 11,25 \text{ m}$$

So tief ist also der Körper bei seinem Wurf gefallen.

- (3) Eine Kugel wird horizontal mit abgeschossen und landet 4 m weit draußen und 3 m tiefer. Mit welcher Geschwindigkeit wurde der Körper abgeschossen

Aus der Höhe berechnen wir die Flugdauer: (Diesen Grundsatz sollte man sich merken.)

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{6 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{0,6} \text{ s} = 0,77 \text{ s}$$

Für die horizontale Bewegung gilt:

$$x = v_0 \cdot t \Rightarrow v_0 = \frac{x}{t} = \frac{4 \text{ m}}{0,77 \text{ s}} = 5,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- (4) Eine Kugel wird horizontal mit $v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ abgeschossen und trifft nach 1 s auf.

Aus welcher Höhe wurde sie abgeschossen und wie weit flog er ?

Weil die horizontale Bewegung gleichförmig ist, folgt:

$$x = v_0 \cdot t = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ s} = 4 \text{ m} \quad \text{Das ist die Flugweite.}$$

Und nun die Falltiefe:

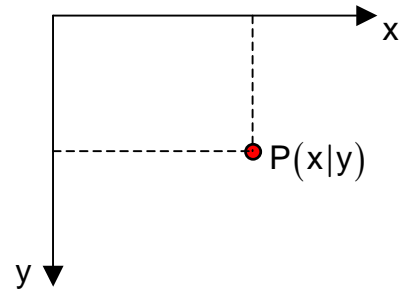
$$y = \frac{1}{2}gt^2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s}^2 = 5 \text{ m}$$

2. Bahnkurve beim waagerechten Wurf

Die Aufstellung der Gleichung einer Bahnkurve ist ein rein mathematisches Problem.

Zunächst die Vorbereitungen. Wir legen der Bewegung ein x-y-Koordinatensystem zugrunde. Wie im ersten besprochen soll in x-Richtung die gleichförmige Bewegung durchgeführt werden, in y-Richtung der freie Fall.

Die Position P des fliegenden Körpers wird damit durch zwei Koordinaten festgehalten: $P(x|y)$.



Diese wiederum können wir mit den Bewegungsgleichungen berechnen:

$$x = v_0 \cdot t \quad (1)$$

und
$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Also befindet sich der Körper zum Zeitpunkt t im Punkt $P(v_0t|\frac{1}{2}gt^2)$

Die Berechnung der Bahngleichung ist nun eine sogenannte Ortskurvenaufgabe der Analysis.

An einem Beispiel führe ich das ganz gründlich durch:

Dazu verwende ich $v_0 = 2 \frac{m}{s}$.

Vorübung: Nehmen wir $x_1 = 0,1 \text{ m}$,
dazu können wir mit (1) die Flugdauer berechnen:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0} = \frac{0,1\text{m}}{2 \frac{m}{s}} = 0,05 \text{ s}$$

Damit erhalten wir $y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 5 \frac{m}{s^2} \cdot (0,05 \text{ s})^2 = 0,0125 \text{ m}$

Wir haben also den Kurvepunkt $P_1(0,1 \text{ m} | 0,0125 \text{ m})$ berechnet.

Nun dasselbe mit $x_2 = 0,2 \text{ m} \Rightarrow t_2 = \frac{x_2}{v_0} = \frac{0,2\text{m}}{2 \frac{m}{s}} = 0,1 \text{ s}$

Ergibt $y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = 5 \frac{m}{s^2} \cdot (0,1 \text{ s})^2 = 0,05 \text{ m} : P_2(0,2 \text{ m} | 0,05 \text{ m})$

Und dasselbe mit $x_3 = 0,5 \text{ m} : \Rightarrow t_3 = \frac{x_3}{v_0} = \frac{0,5\text{m}}{2 \frac{m}{s}} = 0,25 \text{ s}$

Ergibt $y_3 = \frac{1}{2}gt_3^2 = 5 \frac{m}{s^2} \cdot (0,25 \text{ s})^2 = 0,3125 \text{ m} : P_3(0,5 \text{ m} | 0,3125 \text{ m})$

Es erscheint natürlich umständlich, aus der vorgegebenen x-Koordinate immer zuerst die Flugzeit errechnen zu müssen, die dann erst die y-Koordinate liefert.

Stellen wir also eine Formel her, die diesen Schritt beinhaltet. Dazu lösen wir

$x = v_0 \cdot t$ nach t auf: $t = \frac{x}{v_0}$ und setzen dies in die Formel für y ein:

$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$. Dies kann man noch umformen in

$$y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$

In unserem Beispiel kennen wir $v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, also heißt die Formel hier:

$$y = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \cdot 4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \cdot x^2$$

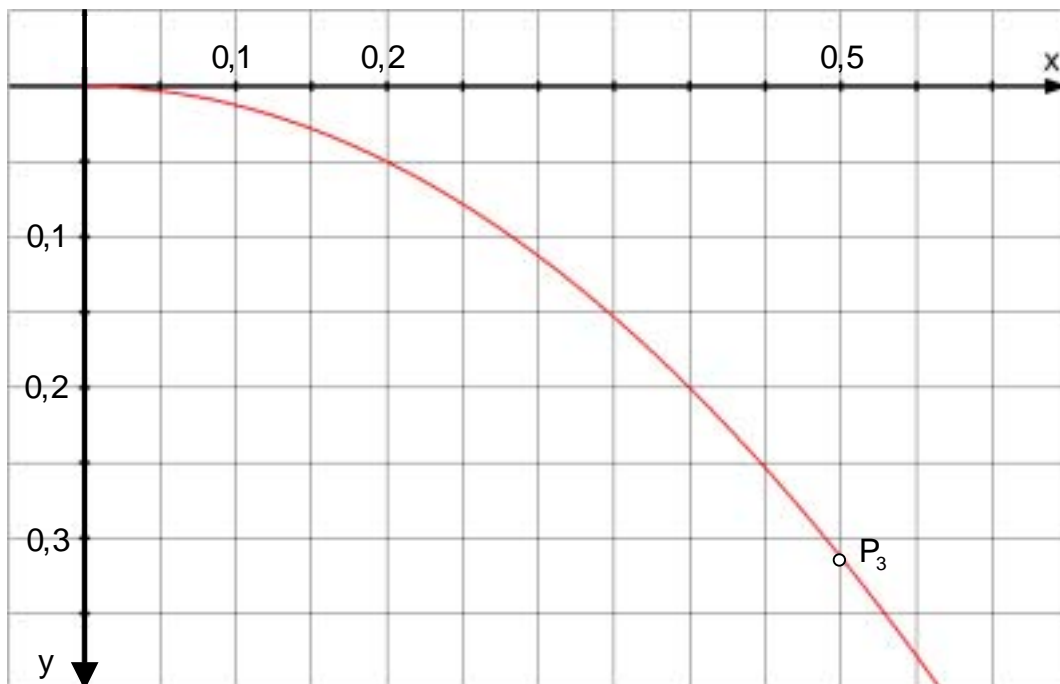
d.h. $y = 1,25 \frac{1}{\text{m}} \cdot x^2$

Diese Gleichung gestattet also das sofortige Berechnen der y -Koordinaten aus den x -Koordinaten für alle Bahnpunkte. Es ist somit die Gleichung der Bahnkurve.

Und wir erkennen an x^2 , daß es eine **Parabel** vorliegt. Die seltsame Maßeinheit $\frac{1}{\text{m}}$ ergibt sich durch Kürzen der Einheiten. Sie ist auch notwendig für die Formel und darf nicht weggelassen werden:

Setzen wir $x = 0,5 \text{ m}$ ein, liefert sie $y = 1,25 \frac{1}{\text{m}} \cdot (0,5 \text{ m})^2 = 1,25 \frac{1}{\text{m}} \cdot 0,25 \text{ m}^2 = 0,3125 \text{ m}$.

Wir erkennen zweierlei: Erstens ergibt sich so die richtige Maßeinheit für y , nämlich Meter, und zweitens haben wir mit der Formel dasselbe Ergebnis zu $x = 0,5 \text{ m}$ erhalten wie auf der Seite zuvor mit unserer umständlichen Rechnung.



Der oben berechnete Kurvenpunkt $P_3(0,5\text{m}|0,3125\text{m})$ ist eingetragen !

3. Geschwindigkeiten entlang der Bahn !

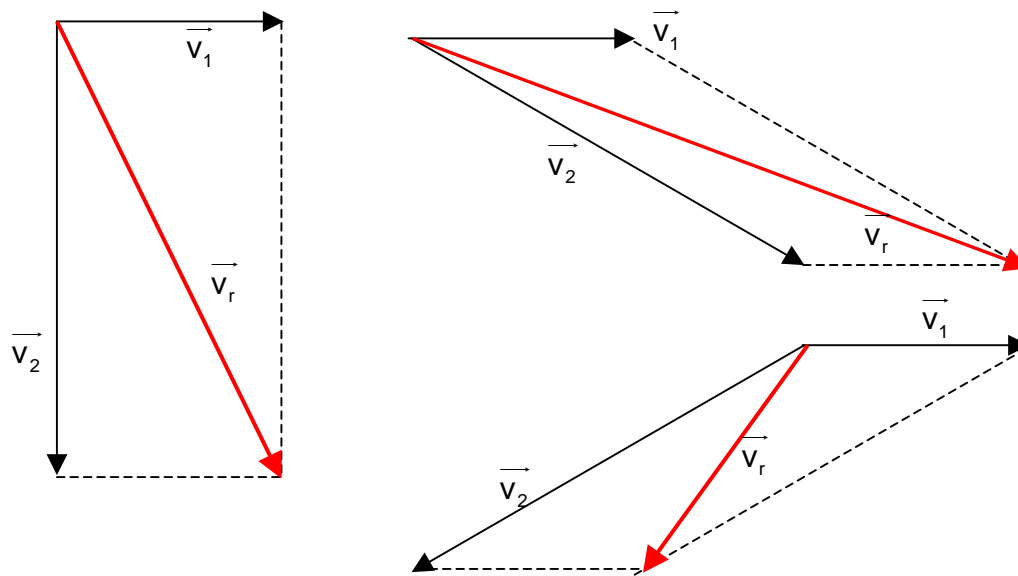
Vorkenntnisse:

Man muß wissen, daß sich Geschwindigkeiten ungestört überlagern (solange man nicht in den Bereich der Lichtgeschwindigkeit kommt !)

Dies geschieht vektoriell:

Wenn ein Boot eine Fahrgeschwindigkeit $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ hat und der Fluß sich in anderer Richtung mit $v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bewegt, dann erhält man eine resultierende Geschwindigkeit gemäß den Regeln der Vektorrechnung:

Hier drei verschiedene Beispiele (Es sind immer nur andere Richtungen vorhanden:)



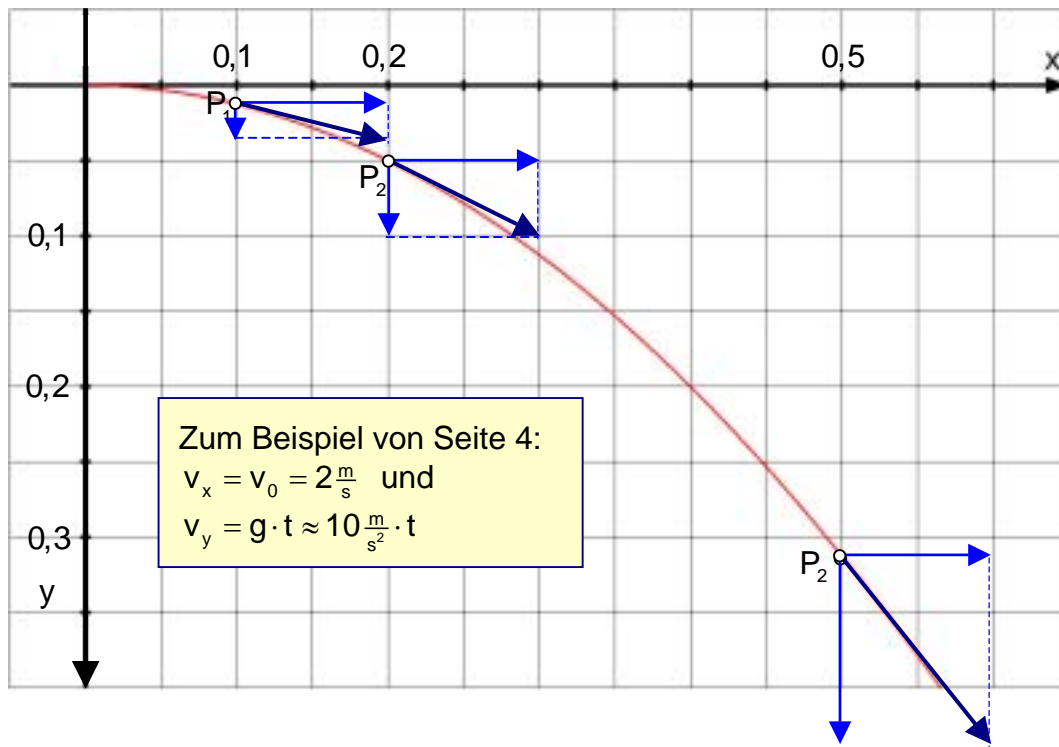
Die resultierende (wirksame) Geschwindigkeit erhält man stets als Diagonale eines Parallelogramms. Die Länge dieser Diagonale, also den Betrag der Geschwindigkeit berechnet man fast stets trigonometrisch, ebenso die Richtung, die man durch einen Winkel z.B. relativ zu \vec{v}_1 angeben kann.

Nur im ersten Fall, in dem die sich überlagernden Geschwindigkeiten zueinander senkrecht (orthogonal) sind, kann man für die Diagonale den Pythagoras anwenden.

Anwendung auf den waagerechten Wurf:

Hier liegt die Situation des ersten Beispiels vor. Horizontal (in x-Richtung) haben wir ja stets die konstante Komponente des waagerechten Wurfs. D.h. Jeder Meter in x-Richtung gemessen, wird in derselben Zeit zurückgelegt. Nach unten wird es jedoch immer schneller, weil der freie Fall durch die Erdanziehung beschleunigt wird.

Schauen wir uns am Bild von Seite vier einige Stellen genauer an und berechnen dazu die Komponenten und die resultierende Bahngeschwindigkeit.



Nach $t_1 = 0,05 \text{ s}$ befindet sich der geworfene Körper im Punkt $P_1(0,1 \text{ m} | 0,0125 \text{ m})$.

Dort hat er diese beiden Geschwindigkeitskomponenten:

$$v_x = v_0 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad v_y = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,05 \text{ s} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Verwenden wir für eine graphische Darstellung der Geschwindigkeit die Einheit 1 cm für $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, dann ergibt sich die oben in P_1 dargestellte Situation. Die Diagonale stellt die resultierende Geschwindigkeit dar.

Wir berechnen sie mit dem Satz des Pythagoras:

$$v_r^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 0,25} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Richtung zeigt abwärts und zwar genau in Richtung der Tangente. Den Winkel gegen die x-Achse berechnen wir so:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,25 \Rightarrow \alpha \approx 14^\circ.$$

Nach $t_2 = 0,1 \text{ s}$ befindet sich der geworfene Körper im Punkt $P_2(0,2 \text{ m} | 0,05 \text{ m})$.

Bahngeschwindigkeit: $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 1} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, denn

$$v_y = g \cdot t \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1 \text{ s} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Richtungswinkel: } \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,5 \Rightarrow \alpha \approx 26,6^\circ$$

Nach $t_3 = 0,25 \text{ s}$ befindet sich der geworfene Körper im Punkt $P_3(0,5 \text{ m} | 0,3125 \text{ m})$:

$$v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 2,5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,25 \Rightarrow \alpha \approx 51,3^\circ$$

Zusammenfassung:

WISSEN:

- (1) Die Flugbahn beim waagerechten Wurf ist eine Parabel. Ihre Gleichung erhält man aus den Gleichungen $x = v_0 \cdot t$ und $y = gt^2$, indem man die x-Gleichung nach t auflöst und dies in die y-Gleichung einsetzt.
- (2) Die Bahngeschwindigkeit entsteht durch vektorielle Addition der Geschwindigkeitskomponenten $v_x = v_0$ und $v_y = g \cdot t$.

Die Größe der resultierenden Geschwindigkeit liefert der Satz des Pythagoras: $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$

Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors und somit der Flugbahn wird festgelegt durch den Winkel α gegen die x – Richtung:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$$

4. Umfassende Aufgaben

Nr. 1

Ein Körper fliegt waagrecht von einer Tischplatte hinaus. Er schlägt auf dem Boden mit der Geschwindigkeit $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ unter 45° auf.

Berechne der Reihe nach die Startgeschwindigkeit v_0 , die Flugdauer, die Falltiefe und die Flugweite x .

Nr. 2

Ein Fahrzeug wird durch eine gespannte Feder auf einer waagerechten Tischplatte in Bewegung gesetzt. Die Geschwindigkeit beim Verlassen der Feder beträgt $v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Reibungszahl auf der Tischfläche beträgt $f = 0,2$ und der Weg von der Feder bis zur Tischkante beträgt 9 m .

- Mit welcher Geschwindigkeit verläßt das Fahrzeug den Tisch ?
- Das Fahrzeug schlägt $1,0 \text{ s}$ nach Verlassen des Tisches unten auf. Wie weit ist es hinausgeflogen und wie tief ist es gefallen ? Unter welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit trifft es auf ?
- Nun wird die Fahrbahnunterlage verändert, wodurch das Fahrzeug nur noch 6 m weit fliegt. Wie groß war jetzt die Absprunggeschwindigkeit vom Tisch ? Wie groß war bei gleicher Startgeschwindigkeit $v_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bei der Feder die Reibungszahl auf der Unterlage ?

Nr. 3

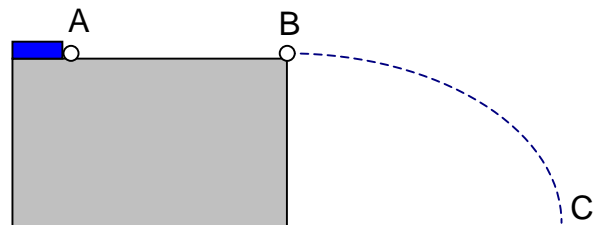
Auf einer Tischkante liegen nebeneinander zwei gleiche Körper. Durch eine geeignete Startvorrichtung werden sie gleichzeitig horizontal abgeschossen. Die Tischhöhe sei 1 m , Körper 1 erhält eine Startgeschwindigkeit von $v_{0,1} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, Körper 2 das doppelte, also $v_{0,2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Erstelle eine Wertetafel für die graphische Darstellung der Flugbahnen im Maßstab 1:10 und berechne Bahnpunkt im Zeitabstand $0,1 \text{ s}$.

Trage in diesen Punkten auch die Geschwindigkeitspfeile ein!

Nr. 4

Ein Körper wird in A durch eine Feder auf die Geschwindigkeit $v_A = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigt. Dann gleitet er unter Reibung bis B und verläßt dort nach 2 s mit $v_B = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die horizontale Fläche.

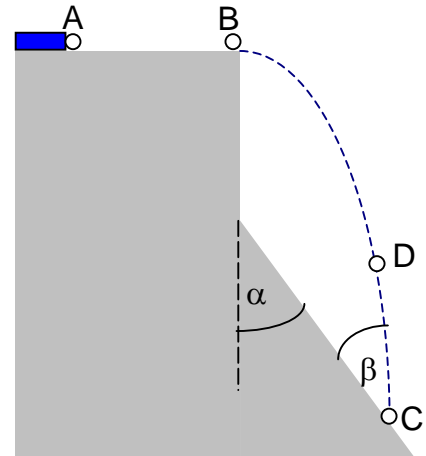


- Berechne die Reibungszahl f für die Strecke AB.
- Der Körper schlägt nach $1,2 \text{ s}$ in C auf. Berechne Falltiefe, Flugweite, Auftreffgeschwindigkeit und Auftreffwinkel.
- Zeichne die Bahnkurve im Maßstab 1:100
- In welchem Bahnpunkt beträgt die Flugrichtung 45° ? Wie groß ist dort v ?
- Wie groß müßte v_B sein, damit er in C unter 45° auftreffen würde ?

Nr. 5

Auf der Strecke AB gilt die Reibungszahl $f = 0,2$. Der in A von einer Feder (blau) abgeschossene Körper hat in B noch die Geschwindigkeit $v_B = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

- Der Körper erreicht B nach 3 s. Berechne seine Startgeschwindigkeit v_A sowie die Länge der Strecke AB.
- Der Körper trifft in C in 5 m Tiefe auf die Schräge auf. Berechne die Flugdauer T , die Flugweite (horizontal gemessen) sowie die Geschwindigkeit v_C und den Auftreffwinkel β , wobei $\alpha = 60^\circ$ ist.
- In D hat der Körper die Geschwindigkeit $v_D = 4,47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechne daraus v_y und die Flugzeit für BD. Welche Koordinaten hat der Punkt D (Ursprung in B, x-Achse nach rechts, y-Achse nach unten) ?
- Zeichne die Flugbahn so, daß 1m 2cm entspricht. Berechne dazu Bahnpunkte im Zeitabstand 0,2 s.



Nr. 6

Auf der Strecke AB gilt die Reibungszahl $f = 0,2$. In A wird ein Körper von einer Feder (blau) mit $v_A = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ abgeschossen. Er erreicht B nach 2 s. Es ist $h = 20 \text{ m}$ und $b = 4,5 \text{ m}$.

- Berechne die Geschwindigkeit im Punkt B und die Länge der Strecke AB.
- Nach welcher Flugzeit T schlägt er in C gegen die Wand? Wie tief liegt C gegenüber dem Niveau AB? Mit welcher Geschwindigkeit trifft er in C auf die Wand und unter welchem Winkel β ?
- In einem zweiten Versuch hat der Körper in B eine geringere Geschwindigkeit und trifft daher in D auf den Boden des Schachtes auf. Man mißt $v_D = 20,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechne daraus v_B und die Koordinaten von D.
- Zeichne die Flugbahn aus Teilaufgabe b) des waagerechten Wurfes. 1 m entspreche 1 cm. Berechne die Bahnpunkte im Zeitabstand 0,3 s. Trage den Geschwindigkeitsvektor zu $t = 0,6 \text{ s}$ ein ($1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \hat{=} 0,5 \text{ cm}$).

