PHYSIK
Wurfbewegungen
2

Waagerechter Wurf

Datei Nr. 91122

Diese Datei ist noch unkorrigiert

Friedrich W. Buckel

August 2002

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

Bemerkung

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Formel (im Volksmund auch „Mitternachtsformel“ genannt, wird von mir ausschließlich verwendet. In nicht wenigen Aufgaben ist sie der leider zu oft eingesetzten p-q-Formel deutlich überlegen.

Waagerechter Wurf

1. Grundlagen

Ein waagerechter Wurf entsteht durch Überlagerung einer gleichförmigen Bewegung in horizontaler Richtung und dem freien Fall (senkrecht dazu).

Physikalische Experimente zeigen, daß sich diese Bewegungen ungestört überlagern, so daß man die Gleichungen für jede der Bewegungen dann benützen kann, wenn sie nützlich sind.

Einführung eines Koordinatensystems:

Die x-Achse zeige in Abwurfrichtung, also horizontal, die y-Achse vertikal nach unten, also in Richtung des freien Falls.

Somit erhält man vier Bewegungsgleichungen, zwei für die Koordinate des Aufenthaltsortes und zwei für die Geschwindigkeit der beiden Teilbewegungen:

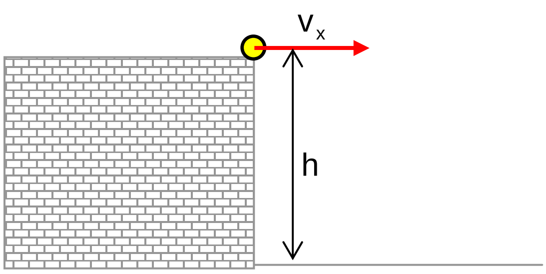
In x-Richtung (gleichförmig): $v_x = v_0$

$x = v_0 \cdot t$

In y-Richtung (freier Fall): $v_y = g \cdot t$

$y = \frac{1}{2} g t^2$

Einfachste Anwendungsbeispiele dazu:



(1) Eine Kugel wird horizontal mit $v_0 = 2\,\frac{m}{s}$ abgestoßen. Nach welcher Zeit schlägt sie auf dem $h = 0{,}8\,m$ tieferen Boden auf ? Wie weit fliegt sie dabei hinaus ?

Die ungestörte Überlagerung bedeutet, daß die Fallbewegung nicht durch die gleichförmige Bewegung in x-Richtung gestört wird. Der Körper kommt also in derselben Zeit unten an, wie wenn er nur fallen würde. (Da gibt es nette Experimente dazu, wo gleichzeitig zwei Kugeln in Bewegung gesetzt werden, die eine fällt nur, die andere führt einen waagerechten Wurf durch. Beide kommen zur selben Zeit unten an!)

Aus der Höhe berechnen wir die Flugdauer:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{1{,}6\,m}{10\,\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{0{,}16}\,s = 0{,}4\,s$$

So lange fliegt also der Körper (auch horizontal!). Dabei legt er in x-Richtung die Strecke $s = v_0 \cdot t = 2\,\frac{m}{2} \cdot 0{,}4\,s = 0{,}8\,m$

zurück.

(2) Eine Kugel wird horizontal mit $v_0 = 4\,\frac{m}{s}$ abgeschossen und fliegt 6 m weit hinaus (in x-Richtung meint man damit), bis sie unten aufschlägt.

Aus welcher Höhe wurde sie abgeschossen ?

Nun müssen wir mit der gleichförmigen Bewegung arbeiten. Wir kennen die Wegstrecke horizontal gemessen mit x = 6 m und setzen ein:

$$x = v_0 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} = \frac{6\,m}{4\,\frac{m}{s}} = 1{,}5\,s$$

Damit berechnen wir die Fallstrecke. Wir verwenden also diese Zeit für die andere Bewegung, den freien Fall, der ja genauso lange dauert:

$$y = \tfrac{1}{2}gt^2 = 5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot (1{,}5\,s)^2 = 11{,}25\,m$$

So tief ist also der Körper bei seinem Wurf gefallen.

(3) Eine Kugel wird horizontal mit abgeschossen und landet 4 m weit draußen und 3 m tiefer. Mit welcher Geschwindigkeit wurde der Körper abgeschossen

Aus der Höhe berechnen wir die Flugdauer: *(Diesen Grundsatz sollte man sich merken.)*

$$y = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{6\,m}{10\,\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{0{,}6}\,s = 0{,}77\,s$$

Für die horizontale Bewegung gilt:

$$x = v_0 \cdot t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{x}{t} = \frac{4\,m}{0{,}77\,s} = 5{,}2\,\tfrac{m}{s}$$

(4) Eine Kugel wird horizontal mit $v_0 = 4\,\frac{m}{s}$ abgeschossen und trifft nach 1 s auf.

Aus welcher Höhe wurde sie abgeschossen und wie weit flog er ?

Weil die horizontale Bewegung gleichförmig ist, folgt:

$x = v_0 \cdot t = 4\,\frac{m}{2} \cdot 1s = 4\,m$ Das ist die Flugweite.

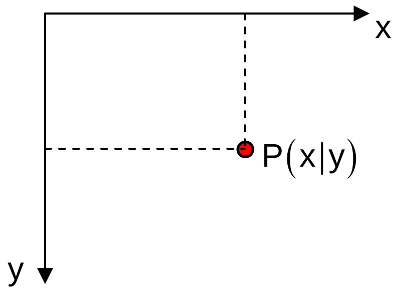
Und nun die Falltiefe:

$$y = \tfrac{1}{2}gt^2 = 5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 1s^2 = 5\,m$$

2. Bahnkurve beim waagerechten Wurf

Die Aufstellung der Gleichung einer Bahnkurve ist ein rein mathematisches Problem.

Zunächst die Vorbereitungen. Wir legen der Bewegung ein x-y-Koordinatensystem zugrunde. Wie im ersten besprochen soll in x-Richtung die gleichförmige Bewegung durchgeführt werden, in y-Richtung der freie Fall.



Die Position P des fliegenden Körpers wird damit durch zwei Koordinaten festgehalten: $P(x|y)$.

Diese wiederum können wir mit den Bewegungsgleichungen berechnen:

$$x = v_0 \cdot t \qquad (1)$$

und $$y = \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Also befindet sich der Körper zum Zeitpunkt t im Punkt $P\left(v_0 t \,|\, \tfrac{1}{2} g t^2\right)$

Die Berechnung der Bahngleichung ist nun eine sogenannte Ortskurvenaufgabe der Analysis.

An einem Beispiel führe ich das ganz gründlich durch:

Dazu verwende ich $v_0 = 2\,\frac{m}{s}$.

Vorübung: Nehmen wir $x_1 = 0{,}1$ m ,
dazu können wir mit (1) die Flugdauer berechnen:

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0} = \frac{0{,}1\,m}{2\,\frac{m}{s}} = 0{,}05\,s$$

Damit erhalten wir $y_1 = \tfrac{1}{2} g t_1^2 = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}05\ s)^2 = 0{,}0125\,m$

Wir haben also den Kurvepunkt $P_1(0{,}1\,m \,|\, 0{,}0125\,m)$ berechnet.

Nun dasselbe mit $x_2 = 0{,}2$ m $\Rightarrow\ t_2 = \frac{x_2}{v_0} = \frac{0{,}2\,m}{2\,\frac{m}{s}} = 0{,}1\,s$

Ergibt $y_2 = \tfrac{1}{2} g t_2^2 = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}1\,s)^2 = 0{,}05\,m:\quad P_2(0{,}2\,m \,|\, 0{,}05\,m)$

Und dasselbe mit $x_3 = 0{,}5$ m: $\Rightarrow\ t_3 = \frac{x_3}{v_0} = \frac{0{,}5\,m}{2\,\frac{m}{s}} = 0{,}25\,s$

Ergibt $y_3 = \tfrac{1}{2} g t_3^2 = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot (0{,}25\ s)^2 = 0{,}3125\,m:\quad P_3(0{,}5\,m \,|\, 0{,}3125\,m)$

Es erscheint natürlich umständlich, aus der vorgegebenen x-Koordinate immer zuerst die Flugzeit errechnen zu müssen, die dann erst die y-Koordinate liefert.

Stellen wir also eine Formel her, die diesen Schritt beinhaltet. Dazu lösen wir $x = v_0 \cdot t$ nach t auf: $t = \frac{x}{v_0}$ und setzen dies in die Formel für y ein:

$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$. Dies kann man noch umformen in

$$y = \frac{g}{2v_0^{\,2}} \cdot x^2$$

In unserem Beispiel kennen wir $v_0 = 2\,\frac{m}{s}$, also heißt die Formel hier:

$$y = \frac{10\,\frac{m}{s}}{2 \cdot 4\,\frac{m^2}{s^2}} \cdot x^2$$

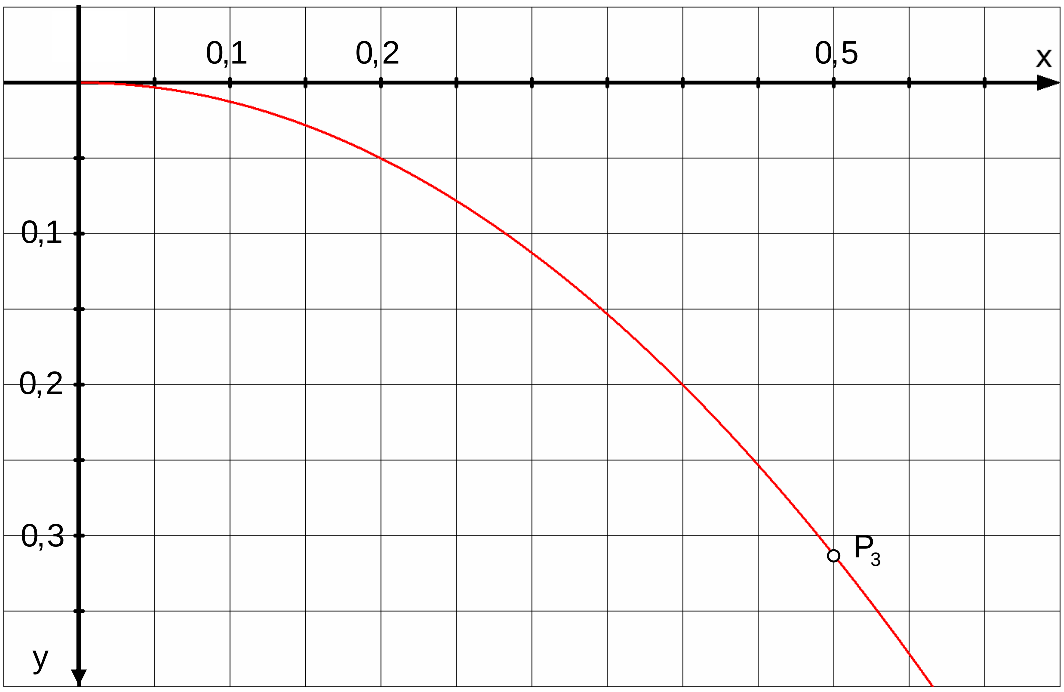
d.h. $$y = 1{,}25\,\tfrac{1}{m} \cdot x^2$$

Diese Gleichung gestattet also das sofortige Berechnen der y-Koordinaten aus den x-Koordinaten für alle Bahnpunkte. Es ist somit die Gleichung der Bahnkurve.

Und wir erkennen an x^2 , daß es eine ***Parabel*** vorliegt. Die seltsame Maßeinhalt $\frac{1}{m}$ ergibt sich durch Kürzen der Einheiten. Sie ist auch notwendig für die Formel und darf nicht weggelassen werden:

Setzen wir $x = 0{,}5$ m ein, liefert sie $y = 1{,}25\,\frac{1}{m} \cdot (0{,}5\,m)^2 = 1{,}25\,\frac{1}{m} \cdot 0{,}25\,m^2 = 0{,}3125\,m$.

Wir erkennen zweierlei: Erstens ergibt sich so die richtige Maßeinheit für y , nämlich Meter, und zweitens haben wir mit der Formel dasselbe Ergebnis zu x = 0,5 m erhalten wie auf der Seite zuvor mit unserer umständlichen Rechnung.



Der oben berechnete Kurvenpunkt $P_3\left(0{,}5\,m \mid 0{,}3125\,m\right)$ ist eingetragen !

3. Geschwindigkeiten entlang der Bahn !

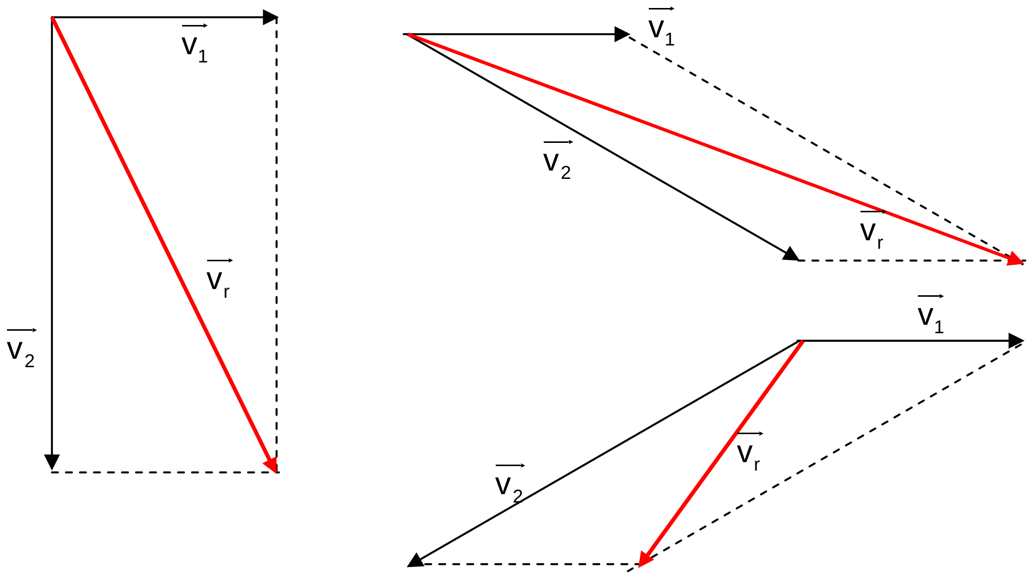
Vorkenntnisse:

Man muß wissen, daß sich Geschwindigkeiten ungestört überlagern (solange man nicht in den Bereich der Lichtgeschwindigkeit kommt !)

Dies geschieht vektoriell:

Wenn ein Boot eine Fahrgeschwindigkeit $v_1 = 6\,\frac{m}{s}$ hat und der Fluß sich in anderer Richtung mit $v_2 = 3\,\frac{m}{s}$ bewegt, dann erhält man eine resultierende Geschwindigkeit gemäß den Regeln der Vektorrechnung:

Hier drei verschiedene Beispiele (Es sind immer nur andere Richtungen vorhanden:)



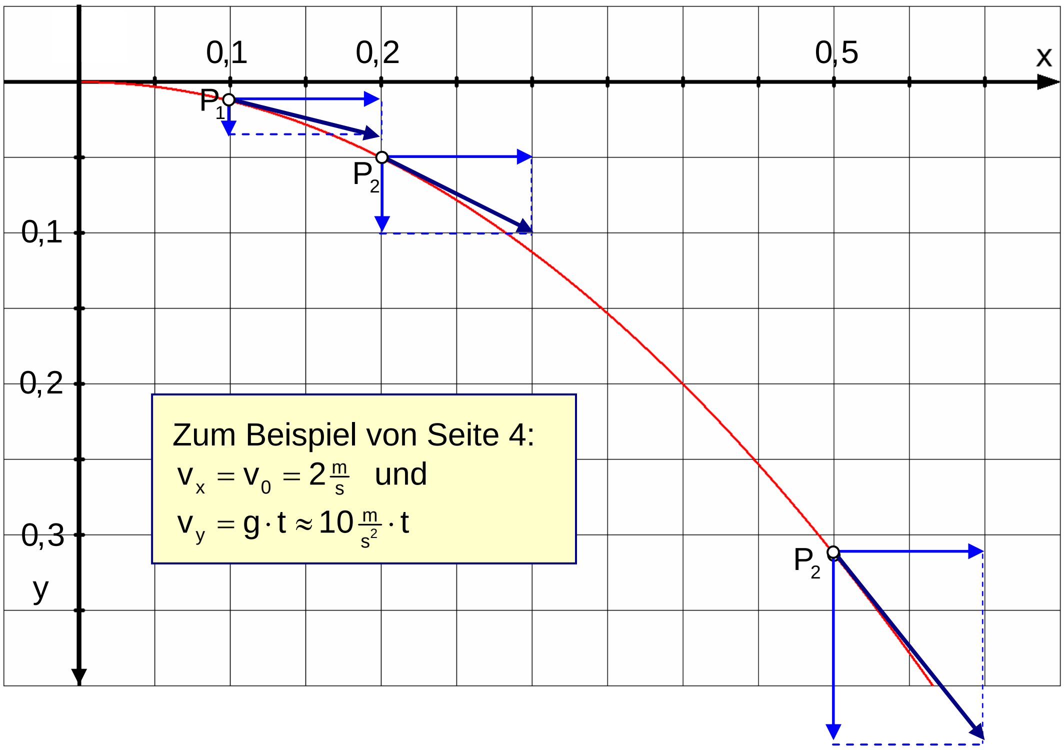
Die resultierende (wirksame) Geschwindigkeit erhält man stets als Diagonale eines Parallelogramms. Die Länge dieser Diagonale, also den Betrag der Geschwindigkeit berechnet man fast stets trigonometrisch, ebenso die Richtung, die man durch einen Winkel z.B. relativ zu $\vec{v_1}$ angeben kann.

Nur im ersten Fall, in dem die sich überlagernden Geschwindigkeiten zueinander senkrecht (orthogonal) sind, kann man für die Diagonale den Pythagoras anwenden.

Anwendung auf den waagerechten Wurf:

Hier liegt die Situation des ersten Beispiels vor. Horizontal (in x-Richtung) haben wir ja stets die konstante Komponente des waagrechten Wurfs. D.h. Jeder Meter in x-Richtung gemessen, wird in derselben Zeit zurückgelegt. Nach unten wird es jedoch immer schneller, weil der freie Fall durch die Erdanziehung beschleunigt wird.

Schauen wir uns am Bild von Seite vier einige Stellen genauer an und berechnen dazu die Komponenten und dir resultierende Bahngeschwindigkeit.



Nach t_1 = 0,05 s befindet sich der geworfene Körper im Punkt $P_1(0{,}1\,m|0{,}0125\,m)$.

Dort hat er diese beiden Geschwindigkeitskomponenten:

$v_x = v_0 = 2\frac{m}{s}$ und $v_y = 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}05\,s = 0{,}5\frac{m}{s}$

Verwenden wir für eine graphische Darstellung der Geschwindigkeit die Einheit 1 cm für $1\frac{m}{s}$, dann ergibt sich die oben in P_1 dargestellte Situation. Die Diagonale stellt die resultierende Geschwindigkeit dar.

Wir berechnen sie mit dem Satz des Pythagoras:

$$v_r^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 0{,}25}\,\frac{m}{s} = 2{,}06\frac{m}{s}.$$

Die Richtung zeigt abwärts und zwar genau in Richtung der Tangente. Den Winkel gegen die x-Achse berechnen wir so:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0{,}5\frac{m}{s}}{2\frac{m}{s}} = 0{,}25 \Rightarrow \alpha \approx 14^{O}.$$

Nach t_2 = 0,1 s befindet sich der geworfene Körper im Punkt $P_2(0{,}2\,m|0{,}05\,m)$.

Bahngeschwindigkeit: $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4+1}\frac{m}{s} = 2{,}24\frac{m}{s}$, denn

$v_y = g \cdot t \approx 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}1s = 1\frac{m}{s}$.

Richtungswinkel: $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1\frac{m}{s}}{2\frac{m}{s}} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha \approx 26{,}6^{O}$

Nach t_3 = 0,25 s befindet sich der geworfene Körper im Punkt $P_3(0{,}5m|0{,}3125m)$:

$$v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 2{,}5}\,\frac{m}{s} = 2{,}5\frac{m}{s} \text{ und } \tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{2{,}5\frac{m}{s}}{2\frac{m}{s}} = 1{,}25 \Rightarrow \alpha \approx 51{,}3^{O}$$

Zusammenfassung:

WISSEN:

(1) Die Flugbahn beim waagerechten Wurf ist eine Parabel. Ihre Gleichung erhält man aus den Gleichungen $x = v_0 \cdot t$ und $y = gt^2$, indem man die x-Gleichung nach t auflöst und dies in die y-Gleichung einsetzt.

(2) Die Bahngeschwindigkeit entsteht durch vektorielle Addition der Geschwindigkeitskomponenten $v_x = v_0$ und $v_y = g \cdot t$.
Die Größe der resultierenden Geschwindigkeit liefert der Satz des Pythagoras: $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$

Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors und somit der Flugbahn wird festgelegt durch den Winkel α gegen die x – Richtung:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$$

4. Umfassende Aufgaben

Nr. 1

Ein Körper fliegt waagerecht von einer Tischplatte hinaus. Er schlägt auf dem Boden mit der Geschwindigkeit $2\frac{m}{s}$ unter 45^O auf.
Berechne der Reihe nach die Startgeschwindigkeit v_O , die Flugdauer, die Falltiefe und die Flugweite x .

Nr. 2

Ein Fahrzeug wird durch eine gespannte Feder auf einer waagerechten Tischplatte in Bewegung gesetzt. Die Geschwindigkeit beim Verlassen der Feder beträgt $v_A = 10\frac{m}{s}$.
Die Reibungszahl auf der Tischfläche beträgt f = 0,2 und der Weg von der Feder bis zur Tischkante beträgt 9 m.

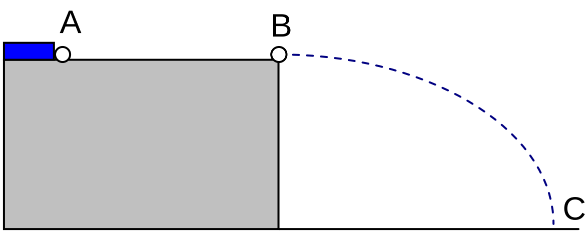
a) Mit welcher Geschwindigkeit verläßt das Fahrzeug den Tisch ?
b) Das Fahrzeug schlägt 1,0 s nach Verlassen des Tisches unten auf.
Wie weit ist es hinausgeflogen und wie tief ist es gefallen ?
Unter welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit trifft es auf ?
c) Nun wird die Fahrbahnunterlage verändert, wodurch das Fahrzeug nur noch 6 m weit fliegt. Wie groß war jetzt die Absprunggeschwindigkeit vom Tisch ?
Wie groß war bei gleicher Startgeschwindigkeit $v_A = 10\frac{m}{s}$ bei der Feder die Reibungszahl auf der Unterlage ?

Nr. 3

Auf einer Tischkante liegen nebeneinander zwei gleiche Körper. Durch eine geeignete Startvorrichtung werden sie gleichzeitig horizontal abgeschossen. Die Tischhöhe sei 1 m, Körper 1 erhält eine Startgeschwindigkeit von $v_{0,1} = 2\frac{m}{s}$, Körper 2 das doppelte, also $v_{0,2} = 4\frac{m}{s}$.
Erstelle eine Wertetafel für die graphische Darstellung der Flugbahnen im Maßstab 1:10 und berechne Bahnpunkt im Zeitabstand 0,1 s.
Trage in diesen Punkten auch die Geschwindigkeitspfeile ein!

Nr. 4

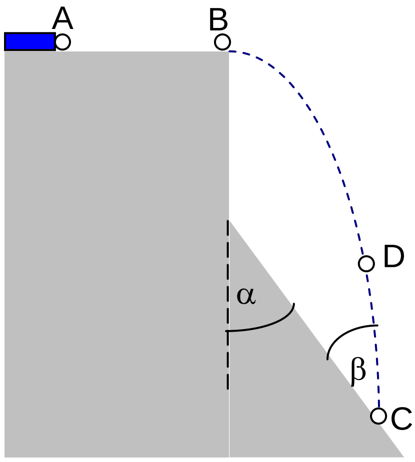
Ein Körper wird in A durch eine Feder auf die Geschwindigkeit $v_A = 12\frac{m}{s}$ beschleunigt. Dann gleitet er unter Reibung bis B und verläßt dort nasch 2 s mit $v_B = 6\frac{m}{s}$ die horizontale Fläche.



a) Berechne die Reibungszahl f für die Strecke AB.
b) Der Körper schlägt nach 1,2 s in C auf. Berechne Falltiefe, Flugweite, Auftreffgeschwindigkeit und Auftreffwinkel.
c) Zeichne die Bahnkurve im Maßstab 1:100
d) In welchem Bahnpunkt beträgt die Flugrichtung 45^O ? Wie groß ist dort v ?
e) Wir groß müßte v_B sein, damit er in C unter 45^O auftreffen würde ?

Nr. 5

Auf der Strecke AB gilt die Reibungszahl f = 0,2.
Der in A von einer Feder (blau) abgeschossene Körper hat in B noch die Geschwindigkeit $v_B = 2\frac{m}{s}$.



a) Der Körper erreicht B nach 3 s.
Berechne seine Startgeschwindigkeit v_A sowie die Länge der Strecke AB.

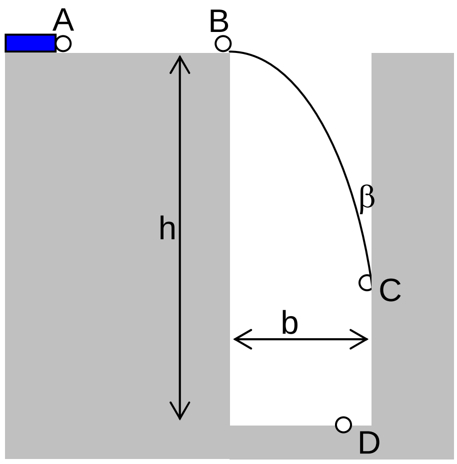
b) Der Körper trifft in C in 5 m Tiefe auf die Schräge auf. Berechne die Flugdauer T, die Flugweite (horizontal gemessen) sowie die Geschwindigkeit v_C und den Auftreffwinkel β, wobei $\alpha = 60^o$ ist.

c) In D hat der Körper die Geschwindigkeit $v_D = 4{,}47\frac{m}{s}$.
Berechne daraus v_y und die Flugzeit für BD.
Welche Koordinaten hat der Punkt D (Ursprung in B, x-Achse nach rechts, y-Achse nach unten) ?

d) Zeichne die Flugbahn so, daß 1m 2cm entspricht.
Berechne dazu Bahnpunkte im Zeitabstand 0,2 s.

Nr. 6

Auf der Strecke AB gilt die Reibungszahl f = 0,2.
In A wird ein Körper von einer Feder (blau) mit $v_A = 7\frac{m}{s}$ abgeschossen. Er erreicht B nach 2 s. Es ist h = 20 m und b = 4,5 m.



a) Berechne die Geschwindigkeit im Punkt B und die Länge der Strecke AB.

b) Nach welcher Flugzeit T schlägt er in C gegen die Wand ? Wie tief liegt C gegenüber dem Niveau AB ?
Mit welcher Geschwindigkeit trifft er in C auf die Wand und unter welchem Winkel β ?

c) In einem zweiten Versuch hat der Körper in B eine geringere Geschwindigkeit und trifft daher in D auf den Boden des Schachtes auf. Man mißt $v_D = 20{,}1\frac{m}{s}$.
Berechne daraus v_B und die Koordinaten von D.

d) Zeichne die Flugbahn aus Teilaufgabe b) des waagerechten Wurfes.
1 m entspreche 1 cm. Berechne die Bahnpunkte im Zeitabstand 0,3 s.
Trage den Geschwindigkeitsvektor zu t = 0,6 s ein ($1\frac{m}{s} \triangleq 0{,}5$ cm).

LÖSUNGEN

Nr. 1

Ein Körper fliegt waagerecht von einer Tischplatte weg. Er schlägt auf dem Boden mit der Geschwindigkeit $2\frac{m}{s}$ unter 45^O auf.
Berechne der Reihe nach die Startgeschwindigkeit v_O, die Flugdauer T, die Falltiefe h und die Flugweite x.

Lösung

Zunächst die Bewegungsgleichungen:

In x-Richtung (gleichförmig):

$$v_x = v_0 \quad (1)$$
$$x = v_0 \cdot t \quad (2)$$

In y-Richtung (freier Fall):

$$v_y = g \cdot t \quad (3)$$
$$y = \tfrac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

Für die Bahngeschwindigkeit gilt:

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} \quad (5)$$

Für die Flugrichtung gilt:

$$\tan\gamma = \frac{v_y}{v_x} \quad (6)$$

Gegeben ist nun $v = 2\frac{m}{s}$ und $\gamma = 45^O$ also ist $\tan\gamma = \tan 45^O = 1$

Aus (6) folgt daher $1 = \frac{v_y}{v_x} \Leftrightarrow v_y = v_x$. (7)

Setzt man dies in (5) ein, folgt: $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_x{}^2} = \sqrt{2v_x{}^2} = v_X \cdot \sqrt{2}$

Nach v_X aufgelöst: $v_x = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{m}{s} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{m}{s} = \sqrt{2}\,\frac{m}{s} \approx 1{,}41\frac{m}{s} = v_O$

Wegen (7) gilt: $v_y = v_x = 1{,}41\frac{m}{s}$.

Aus (3) folgt daher $v_y = g \cdot t \Rightarrow T = \frac{v_y}{g} \approx \frac{1{,}41}{10}s = 0{,}14\,s$

Dies ergibt mit (4) die Falltiefe $h = \tfrac{1}{2}gt^2 = 5\frac{m}{s^2}\cdot(0{,}14s)^2 = 0{,}098\,m \approx 9{,}8\,cm$

und mit (2) die Flugweite $x = v_O \cdot T = 1{,}41\frac{m}{s}\cdot 0{,}14\,s \approx 0{,}20\,m$

Einschub: Verzögerte Bewegung durch Reibung

Für die folgenden Aufgaben brauchen wir die **Bremsverzögerung als Folge der Gleitreibung**.

Nach Newton gilt: $F = m \cdot a$ also $a = \frac{F}{m}$. (1)

Die bei der Reibung wirkende Kraft ist die **Reibungskraft** $F_R = f \cdot N = f \cdot G = f \cdot m \cdot g$

Die No0rmalkraft drückt den Körper senkrecht gegen die Unterlage und ist für die Reibung verantwortlich. Im Fall einer horizontalen Ebene ist diese Normalkraft genau die Gewichtskraft $G = m \cdot g$.

Aus (1) folgt daher für die **Bremsverzögerung**:

$$a = \frac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g$$

Damit kann man nun gie gleichmäßig verzögerte Bremsbewegung berechnen.

Nr. 2

Ein Fahrzeug wird durch eine gespannte Feder auf einer waagerechten Tischplatte in Bewegung gesetzt. Die Geschwindigkeit beim Verlassen der Feder beträgt $v_A = 10\,\frac{m}{s}$.
Die Reibungszahl auf der Tischfläche beträgt $f = 0{,}2$ und der Weg von der Feder bis zur Tischkante beträgt 9 m.

a) Mit welcher Geschwindigkeit verläßt das Fahrzeug den Tisch ?
b) Das Fahrzeug schlägt 1,0 s nach Verlassen des Tisches unten auf.
Wie weit ist es hinausgeflogen und wie tief ist es gefallen ?
Unter welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit trifft es auf ?
c) Nun wird die Fahrbahnunterlage verändert, wodurch das Fahrzeug nur noch 6 m weit fliegt. Wie groß war jetzt die Absprunggeschwindigkeit vom Tisch ?
Wie groß war bei gleicher Startgeschwindigkeit $v_A = 10\,\frac{m}{s}$ bei der Feder die Reibungszahl auf der Unterlage ?

Lösung:

a) Berechnung der Bremsverzögerung:

$$a = \frac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g = 0{,}2 \cdot 10\,\frac{m}{s^2} = 2\,\frac{m}{s^2}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} v = v_A - a \cdot t & (1) \\ s = v_A \cdot t - \frac{1}{2}at^2 & (2) \end{array}}$$

Gegeben sind $v_0 = 12\,\frac{m}{s}$ und $s = 9$ m . Damit kann man die Gleichung (2) verwenden:

$$9\,m = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - 1\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

$$1\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 - 10\,\frac{m}{s} \cdot t + 9\,m = 0 \quad \Big| : \frac{m}{s^2} \quad \text{d.h.} \ \cdot \frac{s^2}{m}$$

$$t^2 - 10\,s \cdot t + 9\,s^2 = 0$$

WISSEN: Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

hat die Lösung $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Also folgt: $$t_{1,2} = \frac{10s \pm \sqrt{100\,s^2 - 4 \cdot 9s^2}}{2} = \frac{10s \pm \sqrt{64\,s^2}}{2} = \frac{10s \pm 8s}{2} \approx \begin{cases} 9\,s \\ 1\,s \end{cases}$$

Wie man bei Bremsbewegungen gelernt hat (haben sollte), gilt in so einem Fall immer die kleinere Zeit. (Die größere kann man so deuten: Läßt man das Fahrzeug bis zum Halten fahren und dann rückwärts beschleunigen, dann kommt es nach 9 s an der Wegmarke 9m an !)

Aus (1) folgt dann $v = 10\,\frac{m}{s} - 1\,\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s = 9\,\frac{m}{s}$.

b) Das Fahrzeug schlägt 1,0 s nach Verlassen des Tisches unten auf. Wie weit ist es hinausgeflogen und wie tief ist es gefallen ? Unter welchem Winkel und mit welcher Geschwindigkeit trifft es auf ?

Nun benötigt man die 4 Bewegungsgleichungen des waagerechten Wurfes:

In x-Richtung (gleichförmig):

$$v_x = v_0 \qquad (1)$$
$$x = v_0 \cdot t \qquad (2)$$

In y-Richtung (freier Fall):

$$v_y = g \cdot t \qquad (3)$$
$$y = \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

Mit der gegebenen Flugdauer $T = 1\,\text{s}$ kann man alle Daten leicht berechnen:

Flugweite: $x(1\text{s}) = 9\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\,\text{s} = 9\,\text{m}$

Falltiefe: $y(t) = \tfrac{1}{2} g t^2 = 5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{s}^2 = 5\,\text{m}$

Geschwindigkeitskomponenten: $v_x = v_0 = 9\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$

$v_y = g \cdot t \approx 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{s} = 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Bahngeschwindigkeit nach 1 s: $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \approx 13{,}5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Auftreffwinkel: $\tan\gamma = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{10}{9} \Rightarrow \gamma = 48{,}0^{\text{O}}$.

c) Nun wird die Fahrbahnunterlage verändert, wodurch das Fahrzeug nur noch 6 m weit fliegt. Wie groß war jetzt die Absprunggeschwindigkeit vom Tisch ? Wie groß war bei gleicher Startgeschwindigkeit $v_A = 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$ bei der Feder die Reibungszahl auf der Unterlage ?

Da offenbar an der Falltiefe nichts verändert wurde (das sind räumliche feste Gegebenheiten) , ist auch die Flugdauer mit 1 s konstant geblieben ! Aus der neuen Flugweite x = 6 m folgt dann:

$v_O = v_x = \dfrac{x}{t} = 6\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$ (in x-Richtung liegt eine gleichförmige Bewegung vor !)

Startgeschwindigkeit an der Feder: $v_A = 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$

Bewegungsgleichungen für die Bremsbewegung:

$$v = v_A - a \cdot t$$

und

$$s = v_A \cdot t - \tfrac{1}{2} a t^2 .$$

Wir setzen ein: $6\,\frac{m}{s} = 10\,\frac{m}{s} - a \cdot t$ (1)

Und $9\,m = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} a t^2$ (2)

Die Bremsverzögerung a ist nicht bekannt und ebensowenig die Zeit für die Bewegung auf dem Tisch von der Feder bis zur Abwurfkante.

Hier arbeitet man z.B. mit diesem TRICK: Ich löse (1) nach $a \cdot t$ auf und setze dies in (2) ein, denn es ist ja $\frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} t \cdot (at)$!!
Auf diese Weise wird a eliminiert und wir können t bestimmen:

Aus (1): $a \cdot t = 4\,\frac{m}{s}$ (3)

Aus (2): $\frac{1}{2} a t^2 = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - 9\,m$

d.h. $\frac{1}{2} t \cdot (at) = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - 9\,m$

$\frac{1}{2} t \cdot \left(4\,\frac{m}{s}\right) = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - 9\,m$

ergibt $2\,\frac{m}{s} \cdot t = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - 9\,m$

und $9\,m = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - 2\,\frac{m}{s} \cdot t$

also $8\,\frac{m}{s} \cdot t = 9\,m$

und somit $t = \dfrac{9m}{8\,\frac{m}{s}} = \dfrac{9}{8}\,s = 1{,}125\,s$

Eingesetzt in (3): $a = \dfrac{4\,\frac{m}{s}}{1{,}125\,s} \approx 3{,}6\,\frac{m}{s^2}$

Für die Bremsverzögerung gilt nun $a = \dfrac{F_R}{m} = \dfrac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g$

Also erhält man die Reibungszahl $f = \dfrac{a}{g} \approx \dfrac{3{,}6\,\frac{m}{s^2}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}36$.

Nr. 3

Auf einer Tischkante liegen nebeneinander zwei gleiche Körper. Durch eine geeignete Startvorrichtung werden sie gleichzeitig horizontal abgeschossen.

Die Tischhöhe sei 1 m, Körper 1 erhält eine Startgeschwindigkeit von $v_{0,1} = 2\,\frac{m}{s}$, Körper 2 das doppelte, also $v_{0,2} = 4\,\frac{m}{s}$.

Erstelle eine Wertetafel für die graphische Darstellung der Flugbahnen im Maßstab 1:10 und berechne Bahnpunkt im Zeitabstand 0,1 s.
Trage in diesen Punkten auch die Geschwindigkeitspfeile ein!

LÖSUNG:

Beginnen wir wie immer mit den Bewegungsgleichungen für den waagerechten Wurf:

In x-Richtung (gleichförmig):

$$v_x = v_0 \qquad (1)$$
$$x = v_0 \cdot t \qquad (2)$$

In y-Richtung (freier Fall):

$$v_y = g \cdot t \qquad (3)$$
$$y = \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

Für die Bahngeschwindigkeit gilt:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \qquad (5)$$

Für die Flugrichtung gilt:

$$\tan\gamma = \frac{v_y}{v_x} \qquad (6)$$

Aus der Tischhöhe, die ja die Falltiefe darstellt, errechnet man immer die Flugdauer. Aus (4) folgt nämlich

$$h = \tfrac{1}{2} g T^2 \;\Rightarrow\; T^2 = \frac{2h}{g} \;\Rightarrow\; T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0{,}447\,\text{s}\,.$$

Es muß klar werden, daß die Flugdauer nur von der Falltiefe abhängt, nicht von der Startgeschwindigkeit in x-Richtung. Beide Körper befinden sich also (wenn sie zugleich abgeschossen werden) stets in der gleichen Tiefe und treffen folglich auch gleichzeitig unten auf !!

Wir benötigen nun eine große Wertetafel zur Auflistung der Punktkoordinaten nach t = 0,1 s ; 0,2 s ; 0,3 s ; 0,4 s und 0,447 s (Aufprall).

In diese Tabelle tragen wir auch die Geschwindigkeitskomponenten v_x (die ja konstant bleibt) und v_y ein sowie die dort aktuelle Bahngeschwindigkeit v und den Winkel für die Flugrichtung.

Bewegungsgleichungen für Körper 1:

$v_x = 2\frac{m}{s}$
$x = 2\frac{m}{s} \cdot t$

$v_y = 10\frac{m}{s^2} \cdot t$
$y = 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

für Körper 2:

$v_x = 4\frac{m}{s}$
$x = 2\frac{m}{s} \cdot t$

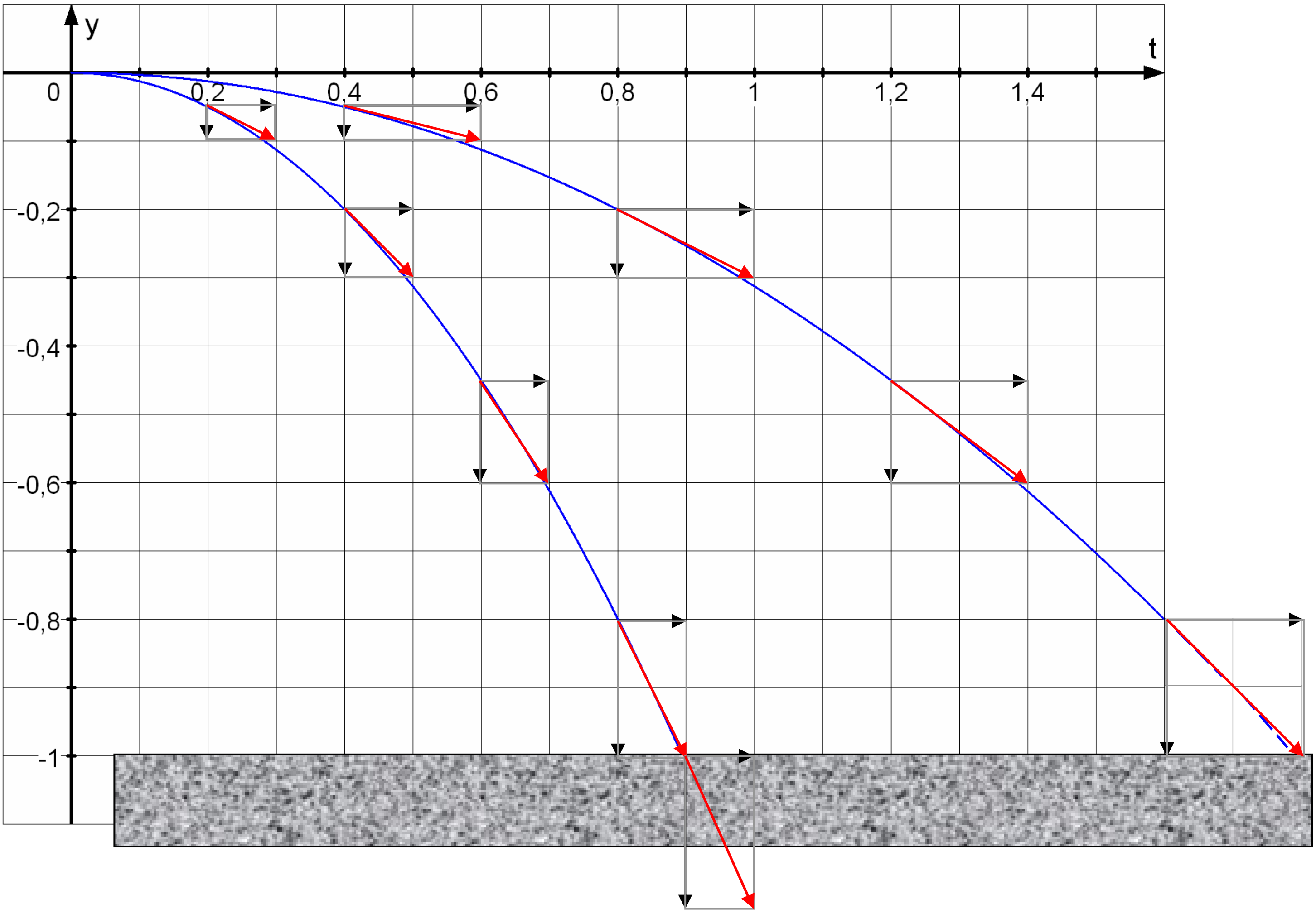
$v_y = 10\frac{m}{s^2} \cdot t$
$y = 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

Flug von Körper 1	T	0	0,1 s	0,2 s	0,3 s	0,4 s	0,447s
	$x = 2\frac{m}{s} \cdot t$	0	0,2 m	0,4 m	0,6 m	0,8 m	0,89 m
	$y = 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$	0	0,05 m	0,2 m	0,45 m	0,8 m	1 m !!
	$v_x = 2\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$
	$v_y = 10\frac{m}{s^2} \cdot t$	$0\frac{m}{s}$	$1\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$	$3\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$	$4{,}47\frac{m}{s}$
	$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$	$2\frac{m}{s}$	$2{,}23\frac{m}{s}$	$2{,}83\frac{m}{s}$	$3{,}61\frac{m}{s}$	$4{,}47\frac{m}{s}$	$4{,}9\frac{m}{s}$
	α aus $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$	0^O	$26{,}56^O$	45^O	$56{,}3^O$	$63{,}4^O$	$65{,}9^O$

Flug von Körper 2	T	0	0,1 s	0,2 s	0,3 s	0,4 s	0,447s
	$x = 4\frac{m}{s} \cdot t$	0	0,4 m	0,8 m	1,2 m	1,6 m	1,79 m
	$y = 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$	0	0,05 m	0,2 m	0,45 m	0,8 m	1 m !!
	$v_x = 4\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$
	$v_y = 10\frac{m}{s^2} \cdot t$	$0\frac{m}{s}$	$1\frac{m}{s}$	$2\frac{m}{s}$	$3\frac{m}{s}$	$4\frac{m}{s}$	$4{,}47\frac{m}{s}$
	$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$	$4\frac{m}{s}$	$4{,}12\frac{m}{s}$	$4{,}47\frac{m}{s}$	$5{,}0\frac{m}{s}$	$5{,}67\frac{m}{s}$	$6{,}0\frac{m}{s}$
	α aus $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$	0^O	14^O	$26{,}6^O$	$36{,}9^O$	45^O	$48{,}2^O$

Dies ergibt folgendes Diagramm:

Flugdiagramm beider Körper.

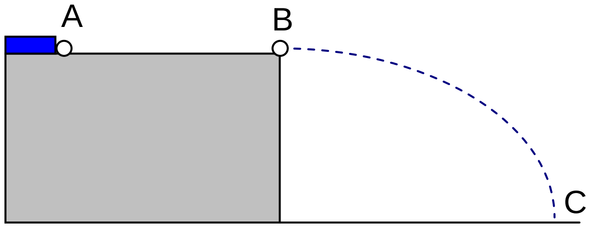


Die Stückelung der zweiten Flugkurve rechts war nötig, weil sich das Diagramm nicht breiter als 17 cm erstellen ließ !

Die negativen Koordinaten an der y-Achse kommen daher, daß die y-Achse im Grafikprogramm, mit dem diese Parabeln erstellt worden sind, nach oben zeigt. Da wir die y-Achse in Wirklichkeit nach unten rechnen, sollten sie positiv sein.

Nr. 4

Ein Körper wird in A durch eine Feder auf die Geschwindigkeit $v_A = 12\,\frac{m}{s}$ beschleunigt. Dann gleitet er unter Reibung bis B und verläßt dort nasch 2 s mit $v_B = 6\,\frac{m}{s}$ die horizontale Fläche.



a) Berechne die Reibungszahl f für die Strecke AB und deren Länge.
b) Der Körper schlägt nach 1,2 s in C auf. Berechne Falltiefe, Flugweite, Auftreffgeschwindigkeit und Auftreffwinkel.
c) Welche Gleichung hat die Bahnkurve ?
Zeichne die Bahnkurve im Maßstab 1:100 mittels Wertetafel im Abstand 0,2 s.
d) In welchem Bahnpunkt beträgt die Flugrichtung 45^O ? Wie groß ist dort v ?
e) Wir groß müßte v_B sein, damit er in C unter 45^O auftreffen würde ?

Lösung

a) Nach Newton gilt: $a = \frac{F_R}{m} = \frac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g \Rightarrow f = \frac{a}{g}$.

Die Bremsverzögerung a muß also zuerst berechnet werden.
Dazu kennen wir die Geschwindigkeiten bei A und B: $v_A = 12\,\frac{m}{s}$, $v_B = 6\,\frac{m}{s}$.
Und wir kennen die für die Strecke AB benötigte Zeit t.

Eine sehr wichtige Formel für beschleunigte Bewegungen ist $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Mit ihr erhalten wir $$a = \frac{12\,\frac{m}{s} - 6\,\frac{m}{s}}{2\,s} = 3\,\frac{m}{s^2}$$

Also folgt $$f = \frac{a}{g} \approx \frac{3\,\frac{m}{s^2}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}3\,.$$

Die Länge der Strecke AB folgt aus dem Weg-Zeit-Gesetz für verzögerte Bewegungen:

$$s(t) = v_A \cdot t - \tfrac{1}{2}at^2 = 12\,\tfrac{m}{s} \cdot 2\,s - \tfrac{1}{2} \cdot 3\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 18\,m \quad !!!$$

b) Nun die Bewegungsgleichungen für den waagerechten Wurf:

x-Richtung	$v_x = v_0$ (1)	Bahngeschwindigkeit:	
	$x = v_0 \cdot t$ (2)	$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$	(5)
y-Richtung	$v_y = g \cdot t$ (3)	Flugrichtung:	
	$y = \frac{1}{2}gt^2$ (4)	$\tan\gamma = \frac{v_y}{v_x}$	(6)

Gegeben ist die Flugdauer T = 1,2 s. Daraus folgt der Reihe nach:

Aus (4) die Falltiefe: $y = \frac{1}{2}gt^2 \approx 5\frac{m}{s^2}\cdot(1{,}2\,s)^2 = 7{,}2\,m$,

aus (2) die Flugweite: $x = v_B \cdot t = 6\frac{m}{s}\cdot 1{,}2\,s = 7{,}2\,m$

aus (3) die y-Geschwindigkeitskomponente: $v_y = g\cdot t \approx 10\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}2\,s = 12\frac{m}{s}$,

aus (5) die Auftreffgeschwindigkeit: $v = \sqrt{{v_B}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{\left(6\frac{m}{s}\right)^2 + \left(12\frac{m}{s}\right)^2} = 13{,}4\frac{m}{s}$

und aus (6) der Auftreffwinkel: $\tan\gamma = \frac{v_y}{v_x} = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow \gamma = 63{,}4^{\circ}$.

c) Gleichung der Bahnkurve:

Es gilt $x = v_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$

und $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$

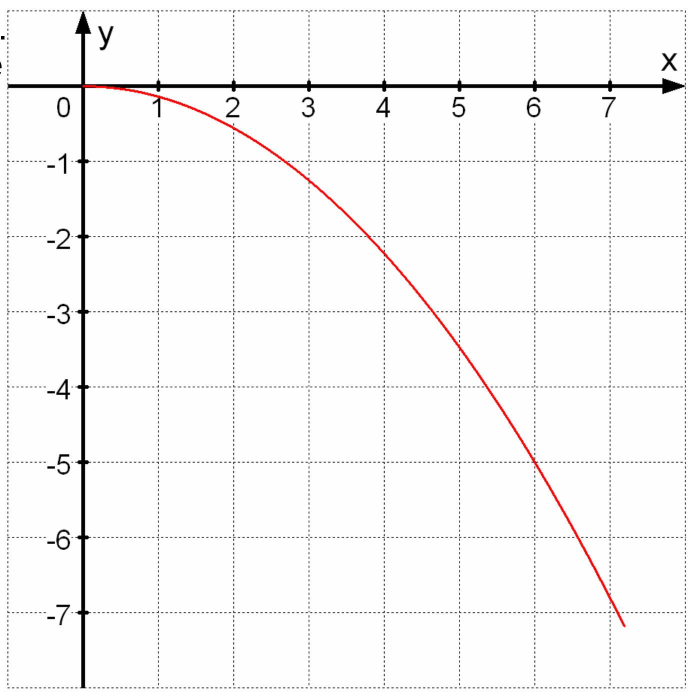
Umgestellt: $y = \frac{g}{2{v_0}^2}\cdot x^2$

Mit Zahlen: $y = \frac{10\frac{m}{s^2}}{2\cdot\left(6\frac{m}{s}\right)^2}\cdot x^2 \Rightarrow y = \frac{10}{72\,m}\cdot x^2 \Rightarrow y = \frac{5}{36\,m}\cdot x^2$

Die Einheit m im Nenner ist notwendig, damit nach dem Einsetzen für x auch die Koordinate y die Einheit m erhält !

T	0,2 s	0,4 s	0,6 s	0,8 s	1,0 s	1,2 s
$x = 6\frac{m}{s}\cdot t$	0	2,4 m	3,6 m	4,8 m	6,0 m	7,2 m Wurfweite
$y = 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$	0	0,8 m	1,8 m	3,2 m	5,0 m	7,2 m Falltiefe

Bahnkurve des waagerechten Wurfes. Weil das Grafikprogramm die y-Achse nur nach oben zeichnen konnte, haben die y-Werte hier negative Koordinaten.



d) Die Flugrichtung soll nun 45^{O} betragen. Wir benötigen diese Formeln:

$\tan\gamma = \frac{v_y}{v_x}$ und $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$.

Da $\tan 45^{O} = 1$ ist, folgt: $\frac{v_y}{v_x} = 1 \Leftrightarrow v_y = v_x$.

Wir kennen die stets konstante Geschwindigkeit $v_x = v_B = 6\,\frac{m}{s}$.

Mit $v_y = g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_y}{g} \approx \frac{6\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}6\,s$.

Dort ist dann $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{v_x^{\,2} + v_x^{\,2}} = \sqrt{2v_x^{\,2}} = v_X \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,\frac{m}{s} \approx 8{,}5\,\frac{m}{s}$

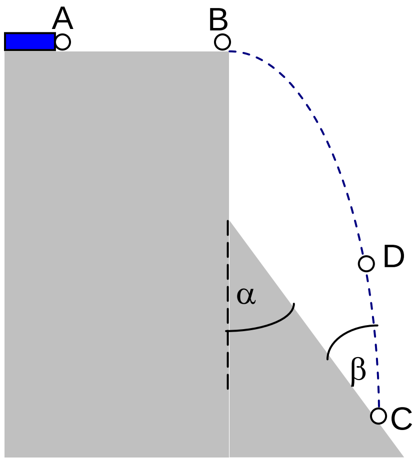
e) Damit der Körper in C unter 45^{O} auftrifft, muß dort $v_x = v_y$ sein.

C wird nach 1,2 s in 7,2 m Tiefe erreicht. Dort ist $v_y = g \cdot t = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}2\,s = 12\,\frac{m}{s}$

Also muß auch $v_x = v_B = 12\,\frac{m}{s}$ betragen !

Nr. 5

Auf der Strecke AB gilt die Reibungszahl f = 0,2.
Der in A von einer Feder (blau) abgeschossene Körper hat in B noch die Geschwindigkeit $v_B = 2\frac{m}{s}$.



a) Der Körper erreicht B nach 3 s. Berechne seine Startgeschwindigkeit v_A sowie die Länge der Strecke AB.

b) Der Körper trifft in C in 5 m Tiefe auf die Schräge auf. Berechne die Flugdauer T, die Flugweite (horizontal gemessen) sowie die Geschwindigkeit v_C und den Auftreffwinkel β, wobei $\alpha = 60^o$ ist.

c) In D hat der Körper die Geschwindigkeit $v_D = 4{,}47\frac{m}{s}$.
Berechne daraus v_y und die Flugzeit für BD.
Welche Koordinaten hat der Punkt D (Ursprung in B, x-Achse nach rechts, y-Achse nach unten) ?

d) Zeichne die Flugbahn so, daß 1m 2cm entspricht.
Berechne dazu Bahnpunkte im Zeitabstand 0,2 s.

LÖSUNG

a) Auf der Strecke AB wird gleichmäßig gebremst mit

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g = 0{,}2 \cdot 10\frac{m}{s^2} = 2\frac{m}{s^2}$$

Bewegungsgleichungen dazu: $v(t) = v_A - a \cdot t$ (1)

und $s(t) = v_A \cdot t - \frac{1}{2}at^2$ (2)

Für die Strecke AB benötigt der Körper laut Angabe 3 s, also gilt:

$$v_B = v(3\,s) = v_A - a \cdot t$$

Also gilt: $v_A = v_B + a \cdot t = 2\frac{m}{s} + 2\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = 8\frac{m}{s}$

Und weiter folgt: $s(3s) = 8\frac{m}{s} \cdot 3s - \frac{1}{2} \cdot 2\frac{m}{s^2} \cdot 9s^2 = 15m = \overline{AB}$.

b) Aufprall in 5 m Tiefe ergibt die Flugdauer T durch

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; T^2 = \frac{2y}{g} = \frac{10\,m}{10\frac{m}{s^2}} = 1s^2 \;\Rightarrow\; T = 1s$$

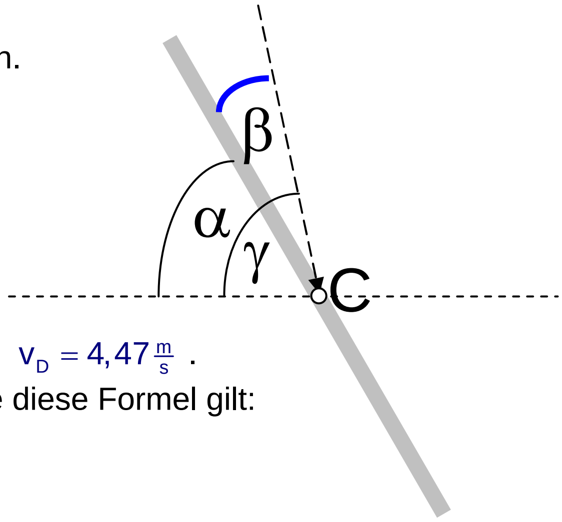
Die Flugweite: $x = v_B \cdot t = 2\,\frac{m}{s} \cdot 1\,s = 2\,m$

Geschwindigkeiten:

$$v_x = v_B = 2\,\tfrac{m}{s} \quad (\text{konstant})$$
$$v_y = g \cdot t = 10\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 1\,s = 10\,\tfrac{m}{s}$$
$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{4 + 100}\,\tfrac{m}{s} = \sqrt{104}\,\tfrac{m}{s} \approx 10{,}2\,\tfrac{m}{s}$$

Flugrichtung beim Aufprall:

$$\tan\gamma = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10}{2} = 5 \;\Rightarrow\; \gamma = 78{,}7^{O}.$$



Dies ist gegen die Horizontale gemessen.
Da die Auftreff-Fläche um 60 ^{O} geneigt ist, ergibt sich der Winkel

$$\beta = \gamma - \alpha = 78{,}8^{O} - 60^{O} = 18{,}8^{O}$$

c) In D hat der Körper die Geschwindigkeit $v_D = 4{,}47\,\frac{m}{s}$.
Dies ist die Bahngeschwindigkeit, für die diese Formel gilt:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Da wir v_x kennen (diese Komponente bleibt konstant), können wir die Gleichung nach v_y umstellen:

$$v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 \;\Rightarrow\; v_y = \sqrt{v^2 - {v_x}^2} = \sqrt{4{,}47^2 - 2^2}\,\tfrac{m}{s} \approx 4\,\tfrac{m}{s}$$

Diese Geschwindigkeit erreicht er in dieser Zeit:

$$v_y = g \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{v_y}{g} = \frac{4\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 0{,}4\,s.$$

Nach dieser Zeit hatte seine Position D diese Koordinaten:

$$x = v_B \cdot t = 2\,\tfrac{m}{s} \cdot 0{,}4\,s = 0{,}8\,m$$
$$y = \tfrac{1}{2} g t^2 = 5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 0{,}16\,s^2 = 0{,}8\,m$$

c) Bewegungsgleichungen für den waagerechten Wurf:

x-Richtung

$v_x = 2\,\frac{m}{s}$ (1)

$x = 2\,\frac{m}{s}\cdot t$ (2)

y-Richtung

$v_y = 10\,\frac{m}{s^2}\cdot t$ (3)

$y = 5\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$ (4)

Wertetafel für die Parabelbahn:

T	0	0,2 s	0,4 s	0,6 s	0,8 s	1,0 s
$x = 2\,\frac{m}{s}\cdot t$	0	0,4 m	0,8 m	1,2 m	1,6 m	2,0 m
$y = 5\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$	0	0,2 m	0,8 m	1,8 m	3,2 m	5,0 m

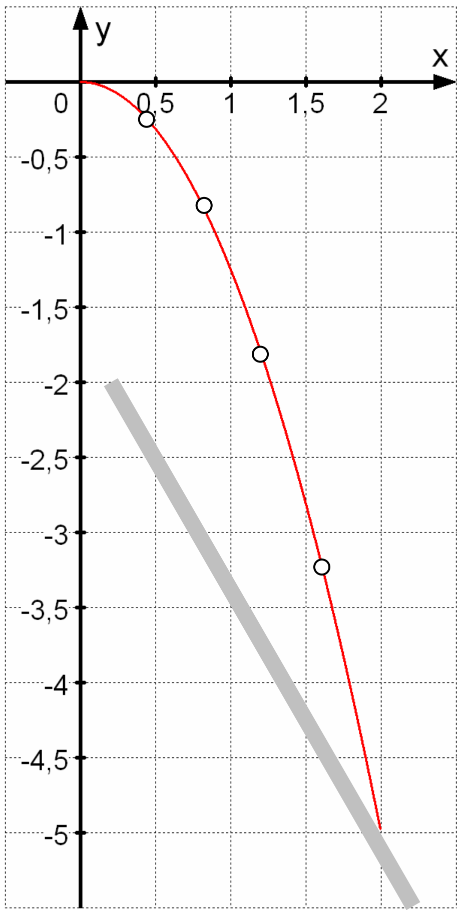
Gleichung der Flugparabel:

$x = 2\,\frac{m}{s}\cdot t$ und $y = 5\,\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

ergeben $t = \dfrac{x}{2\,\frac{m}{s}}$

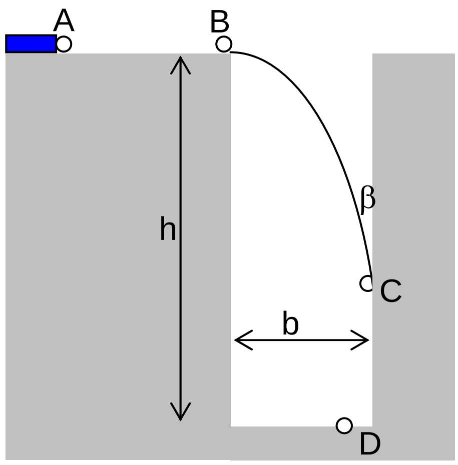
und daher $y = 5\,\frac{m}{s^2}\cdot\left(\dfrac{x}{2\,\frac{m}{s}}\right)^2$

d.h. $y = \dfrac{5}{4\,m}\cdot x^2$



Die y-Achse zeigt leider aus technischen Gründen nach oben, und daher haben wir auch nach unten negative Werte .

Nr. 6



Auf der Strecke AB gilt die Reibungszahl f = 0,2. In A wird ein Körper von einer Feder (blau) mit $v_A = 7\frac{m}{s}$ abgeschossen. Er erreicht B nach 2 s. Es ist h = 20 m und b = 4,5 m.

a) Berechne die Geschwindigkeit im Punkt B und die Länge der Strecke AB.

b) Nach welcher Flugzeit T schlägt er in C gegen die Wand ? Wie tief liegt C gegenüber dem Niveau AB ?
Mit welcher Geschwindigkeit trifft er in C auf die Wand und unter welchem Winkel β ?

c) In einem zweiten Versuch hat der Körper in B eine geringere Geschwindigkeit und trifft daher in D auf den Boden des Schachtes auf. Man mißt $v_D = 20{,}1\frac{m}{s}$.
Berechne daraus v_B und die Koordinaten von D.

d) Zeichne die Flugbahn aus Teilaufgabe b) des waagerechten Wurfes.
1 m entspreche 1 cm. Berechne die Bahnpunkte im Zeitabstand 0,3 s.
Trage den Geschwindigkeitsvektor zu t = 0,6 s ein ($1\frac{m}{s} \triangleq 0{,}5$ cm).

LÖSUNG:

a) Eine verzögerte Bewegung hat die Gleichungen

$$v(t) = v_A - a \cdot t$$
$$s(t) = v_A \cdot t - \tfrac{1}{2}at^2$$

wobei gilt: $a = \dfrac{F_R}{m} = \dfrac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g = 0{,}2 \cdot 10\frac{m}{s^2} = 2\frac{m}{s^2}$

Es folgt: $v_B = v(2s) = 7\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 3\frac{m}{s}$

und $\overline{AB} = s(2s) = 7\frac{m}{s} \cdot 2\,s - \frac{1}{2} \cdot 2\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2 = 14\,m - 4\,m = 10\,m$

b) Die Gleichungen für den waagrechten Wurf lauten:

x-Richtung	$v_x = 3\frac{m}{s}$	(1)
	$x = 3\frac{m}{s} \cdot t$	(2)
y-Richtung	$v_y = 10\frac{m}{s^2} \cdot t$	(3)
	$y = 5\frac{m}{s^2} \cdot t^2$	(4)

Aus der Flugweite folgt die Flugdauer:

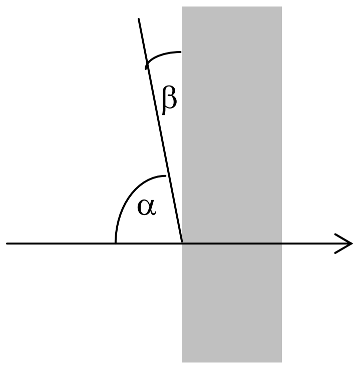
$$b = v_B \cdot T \;\Rightarrow\; T = \frac{b}{v_B} = \frac{4{,}5\,m}{3\,\frac{m}{s}} = 1{,}5\,s$$

Falltiefe: $y = 5\frac{m}{s^2} \cdot (1{,}5\,s)^2 = 11{,}25\,m$

$$v_y = g \cdot t = 10\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}5\,s = 15\frac{m}{s}$$

$$v_C = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{225 + 9}\,\frac{m}{s} \approx 15{,}3\frac{m}{s}$$

Flugrichtung beim Auftreffen in C:



$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{15}{3} = 5 \;\Rightarrow\; \alpha = 78{,}7^{\text{O}}$$

Also folgt: $\beta = 90^{\text{O}} - \alpha = 11{,}3^{\text{O}}$

c) Beim Auftreffen in D betrug die Falltiefe h = 20 m. Daraus folgt die Flugdauer:

$$y = 5\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{20\,\text{m}}{5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2\,\text{s}$$

Und damit erhält man auch die Geschwindigkeitskomponente
$v_y = g\cdot t = 10\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 2\,\text{s} = 20\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$

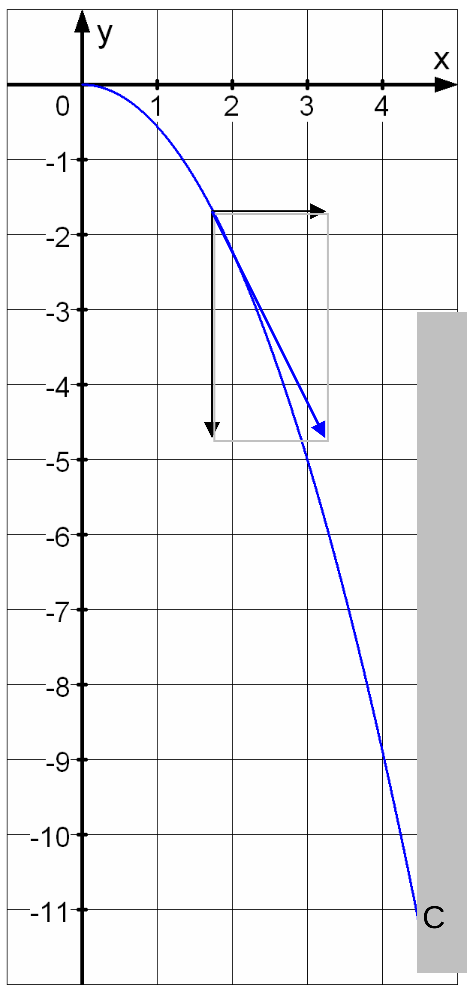
Die Auftreffgeschwindigkeit ist mit $v_D = 20{,}1\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$ bekannt, daraus folgt

$$v_D = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \;\Rightarrow\; v_x = \sqrt{{v_D}^2 - {v_y}^2} = \sqrt{404 - 4}\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}} = 2\tfrac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Und weil die horizontale Geschwindigkeitskomponente beim waagrechten Wurf immer gleich groß bleibt, ist dies auch v_B : $v_B = 2\tfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

Nun noch die Koordinaten von D:
Flugweite: $x = v_B\cdot t = 2\tfrac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 2\,\text{s} = 4\,\text{m}$
Also folgt: $D(4\,\text{m}|20\,\text{m})$.

d)



T	0,3 s	0,6 s	0,9 s	1,2 s	1,5 s
$x = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t$	0,6 m	1,8 m	2,7 m	3,6 m	4,5 m
$y = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2$	0,45 m	1,8 m	4,05 m	7,2 m	11,25 m
$v_y = g\cdot t$	$3\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$6\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$9\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$12\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$15\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v_x = v_B$	$3\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$3\frac{\text{m}}{\text{s}}$