PHYSIK
Wurfbewegungen
1

Senkrechter Wurf nach unten
Senkrechter Wurf nach oben

Datei Nr. 91121

Friedrich W. Buckel

August 2002

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

Bemerkung

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Formel (im Volksmund auch „Mitternachtsformel“ genannt, wird von mir ausschließlich verwendet. In nicht wenigen Aufgaben ist sie der leider zu oft eingesetzten p-q-Formel deutlich überlegen.

1. Senkrechter Wurf nach unten

WISSEN: Beschleunigt ein Körper zur Zeit t = 0, in der er bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_o besitzt, dann führt er quasi eine überlagerte Bewegung durch, nämlich einerseits die aus seiner Anfangsgeschwindigkeit resultierende gleichförmige Bewegung und dazu die durch die Beschleunigung entstehende gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Es gelten daher diese ***Bewegungsgleichungen***:

Weg-Zeit-Gleichung: $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (1)

Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung: $v(t) = v_O + a \cdot t$ (2)

Der Senkrechte Wurf nach unten ist ein Beispiel dafür. Der Körper erhält eine Startgeschwindigkeit und wird zusätzlich durch die Gravitationskraft beschleunigt mit $a = g = 9{,}81 \frac{m}{s^2} \left(\approx 10 \frac{m}{s^2} \right)$

Für den senkrechten Wurf nach unten gelten daher diese ***Bewegungsgleichungen***:

Weg-Zeit-Gleichung: $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$ (1)

Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung: $v(t) = v_O + g \cdot t$ (2)

Rechenbeispiele zum senkrechten Wurf nach unten.

Der Luftwiderstand wird stets vernachlässigt. Wir rechnen mit $g \approx 10 \frac{m}{s^2}$.

(1) Ein Stein wird von einem Hochhaus aus mit $v_0 = 2 \frac{m}{s}$ in die Tiefe geworfen.

a) Nach welcher Zeit trifft er auf dem Boden in 88 m Tiefe auf und welche Geschwindigkeit hat er dort ?

b) Welche Wegstrecke durchfliegt diese Körper in der 3. Sekunde und um welchen Betrag nimmt dabei seine Geschwindigkeit zu ?

c) In welcher Höhe über dem Boden besitzt der Stein die halbe Auftreffgeschwindigkeit?

d) In welcher Höhe hätte man den Stein aus der Ruhe fallen lassen müssen, um mit derselben Geschwindigkeit unten aufzutreffen ?

LÖSUNG:

Für diesen Wurf nach unten gelten diese Bewegungsgleichungen:

$$v(t) = v_0 + g \cdot t \qquad \text{d.h.} \qquad v(t) = 2\tfrac{m}{s} + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (1)$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad \text{d.h.} \qquad s(t) = 2\tfrac{m}{s} \cdot t + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

a) Die Aufschlagtiefe s(t) = 88 m gestattet die Berechnung der Fallzeit aus (2):

$$88\,m = 2\tfrac{m}{s} \cdot t + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 + 2\tfrac{m}{s} \cdot t - 88\,m = 0 \quad \Big| : \tfrac{m}{s^2} \;\; \text{d.h.} \;\; \cdot \tfrac{s^2}{m}$$

$$5\,t^2 + 2s \cdot t - 85\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2s \pm \sqrt{4s^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-88s^2)}}{10} = \frac{-2s \pm \sqrt{4s^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-88s^2)}}{10} = \frac{-2s \pm \sqrt{1764s^2}}{10}$$

$$t_{1,2} = \frac{-2s \pm 42s}{10} = \begin{cases} 4\,s \\ (-4{,}4\,s) \end{cases}$$

Wir ignorieren die nicht sinnvolle negative Flugdauer und erhalten das
Ergebnis: Nach 4 s schlägt der Körper auf dem Boden auf.
Auftreffgeschwindigkeit: $v(4s) = 2\tfrac{m}{s} + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot 4s = 42\tfrac{m}{s}$

b) Berechnung der **Fallstrecke in der 3. Sekunde**:

$$\Delta s = s(3s) - s(2s) = \left(2\tfrac{m}{s} \cdot 3s + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot 9s^2\right) - \left(2\tfrac{m}{s} \cdot 2s + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot 4s^2\right)$$

$$\Delta s = 6\,m + 45m - 4m - 20m = 27\,m$$

Geschwindigkeitszunahme in der 3. Sekunde:

$$\Delta v = v(3s) - v(2s) = \left(2\tfrac{m}{s} + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot 3s\right) - \left(2\tfrac{m}{s} + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot 2s\right)$$

$$\Delta v = 2\tfrac{m}{s} + 30\tfrac{m}{s} - 2\tfrac{m}{s} - 20\tfrac{m}{s} = 10\tfrac{m}{s}$$

Oder kürzer: Es gilt die Formel $a = g = \frac{\Delta v}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \Delta v = g \cdot \Delta t = 10\tfrac{m}{s^2} \cdot 1s = 10\tfrac{m}{s}$

c) Die halbe Auftreffgeschwindigkeit beträgt $v(t) = 21\tfrac{m}{s}$.
Diesen Wert setzt man in (1) ein:

$$21\tfrac{m}{s} = 2\tfrac{m}{s} + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t \;\Rightarrow\; 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t = 19\tfrac{m}{s}$$

Dies ergibt $t = 1{,}9\,s$.

Damit gehen wir in die Formel (2):

$$s(1{,}9\,s) = 2\tfrac{m}{s} \cdot 1{,}9\,s + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot (1{,}9\,s)^2 = 21{,}85\,m$$

Ergebnis: Nach der Fallstrecke 21,85 m hat der Körper die halbe Auftreffgeschwindigkeit.
Dies entspricht der Höhe $h = 88\,m - 21{,}85\,m = 66{,}16\,m$.

d) In welcher Höhe hätte man den Stein aus der Ruhe fallen lassen müssen, um mit derselben Geschwindigkeit unten aufzutreffen ?

Jetzt müssen wir mit den Gleichungen ohne Anfangsgeschwindigkeit rechnen:

Wir wissen nur: $v_{unten} = 42\,\frac{m}{s}$. Und wir verwenden

$$v = \sqrt{2gs} \;\Rightarrow\; s = \frac{v^2}{2g} = \frac{42^2}{20}\,m = 882\,m\,.$$

Wer nicht mit dieser Formel arbeiten will, muß zuerst die Fallzeit berechnen:

$$v = gt \;\Rightarrow\; t = \frac{v}{g} = \frac{42\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 4{,}2\,s$$

Damit folgt: $s = \frac{1}{2}gt^2 = 5\,\frac{m}{s^2}\cdot(4{,}2\,s)^2 = 882\,m\,.$

(2) Ein Körper schlägt nach 5 s Flugdauer in 129 m Tiefe auf. Mit welcher Geschwindigkeit wurde er nach unten abgeworfen ?

Lösung:

Gegeben sind $s(5s) = 129\,m\,.$

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$v(t) = v_0 + g\cdot t \qquad (1)$$
$$s(t) = v_0\cdot t + \tfrac{1}{2}g\cdot t^2 \qquad (2)$$

In (2) eingesetzt ergibt dies:

$$129\,m = v_0\cdot 5s + 5\,\tfrac{m}{s^2}\cdot 25\,s^2 \;\Rightarrow\; v_0\cdot 5s = 129\,m - 125\,m = 4\,m$$

Also wird $v_0 = \frac{4m}{5s} = 0{,}8\,\frac{m}{s}\,.$

(3) Ein Körper schlägt in 48 m Tiefe mit der Geschwindigkeit $31\frac{m}{s}$ auf.
Mit welcher Geschwindigkeit wurde er nach unten abgeworfen und wie lange war der Körper unterwegs ?

Lösung:

Gegeben sind $s(t_1) = 48\,m$ und $v(t_1) = 31\frac{m}{s}$, wobei t_1 die Flugdauer ist.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$v(t) = v_0 + g \cdot t \qquad (1)$$

$$s(t) = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Eingesetzt ergibt dies:

$$31\tfrac{m}{s} = v_0 + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (1)$$

$$48\,m = v_0 \cdot t + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

Es liegen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor. Wir eliminieren v_0 .
Dazu multiplizieren wir die Gleich (1) mit t und subtrahieren dann die zweite Gleichung von ihr:

$$31\tfrac{m}{s} \cdot t = v_0 \cdot t + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1')$$

$$48\,m = v_0 \cdot t + 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

(1') – (2): $$31\tfrac{m}{s} \cdot t - 48\,m = 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Wir ordnen diese quadratische Gleichung nach Potenzen von t:

$$5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 - 31\tfrac{m}{s} \cdot t + 48\,m = 0$$

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit $\frac{s^2}{m}$ und erhalten:

$$5t^2 - 31\,s \cdot t + 48\,s^2 = 0$$

Die allgemeine Lösungsformel liefert:

$$t_{1,2} = \frac{31\,s \pm \sqrt{961 s^2 - 4 \cdot 5 \cdot 48 s^2}}{10} = \frac{31\,s \pm \sqrt{1 s^2}}{10} = \frac{31\,s \pm 1 s}{10} = \begin{cases} 3{,}2\,s \\ 3\,s \end{cases}$$

Zu beiden Zeiten berechnen wir die noch fehlende Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus (1):

$$31\tfrac{m}{s} = v_0 + 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t \;\Rightarrow\; v_0 = 31\tfrac{m}{s} - 10\tfrac{m}{s} \cdot t = \begin{cases} -1\frac{m}{s} \\ 1\frac{m}{s} \end{cases}$$

Damit wird das Ergebnis klar: Bei $v_0 = 1\frac{m}{s}$ fällt der Körper 3 s bis zum Aufprall.
Die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = -1\frac{m}{s}$ wäre ein Abwurf nach oben. Es ist klar, daß er dann etwas länger braucht, bis er unten ankommt: 3,2 s.

Man erkennt, daß in so einem Fall stets die kleinere Zeit der gesuchte Wert ist.

2. Senkrechter Wurf nach oben

Nun wollen wir uns gleich diese Bewegung ansehen. Geben wir dem Körper eine Anfangsgeschwindigkeit nach oben, dann wirkt die Gravitation bremsend, also liegt eine gleichmäßig gebremste Bewegung vor.

Stellt man nun die Bewegungsgleichungen auf, ergibt sich ein Problem, denn wir haben zwei Möglichkeiten:

1. Fall:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \qquad (1)$$

$$h(t) = v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Dann geben wir v_0 ein positives Vorzeichen. Wir legen also die Geschwindigkeitsachse nach oben und ebenfalls die Wegachse:

Beispiel 1: Der Körper wird mit $v_0 = 25\frac{m}{s}$ nach oben abgeworfen. Dann haben wir diese Bewegungsgleichungen:

$$v(t) = 25\tfrac{m}{s} - 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (1)$$

$$h(t) = 25\tfrac{m}{s} t - 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

Stellen wir eine Wertetafel auf:

Zeit t	Geschwindigkeit v(t)	Steighöhe h(t)
0 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} \cdot 0\,s = 25\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 0s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 0s^2 = 0\,m$
0,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5\,s = 20\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 0{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}25s^2 = 11{,}25\,m$
1 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 1s = 15\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 1\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 1\,s^2 = 20\,m$
1,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 1{,}5\,s = 10\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 1{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}25s^2 = 26{,}25\,m$
2 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 2\,s = 5\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 2\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 30\,m$
2,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}5\,s = 0\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 2{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 6{,}25s^2 = 31{,}25\,m$
3 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = -5\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 3\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 9\,s^2 = 30\,m$
3,5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 3{,}5\,s = -10\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 3{,}5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 12{,}25s^2 = 26{,}25\,m$
4 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s = -15\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 4\,s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 20\,m$
5 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} \cdot 5\,s = -25\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 5s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = 0\,m$
6 s	$25\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s} \cdot 6\,s = -35\frac{m}{s}$	$25\frac{m}{s} \cdot 6s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 36\,s^2 = -30\,m$

Diese Tabelle enthält interessante Ergebnisse. Wir wollen sie deuten.

Schauen wir zuerst in die Spalte h(t). Man sieht dort die Höhe, in der sich der Körper zur Zeit t befindet. Die Tabelle zeigt als größte Höhe 31,25 m. Daß dies tatsächlich der Gipfelpunkt der Wurfbewegung ist, erkennen wir daran, daß die zugehörige Geschwindigkeit (linke Spalte) nach 2,5 s gerade 0 ist. Dies ist nur im oberen Umkehrpunkt möglich. Danach nehmen die Höhen wieder ab, und die Geschwindigkeitswerte werden negativ, was anzeigt, daß sich der Körper entgegen der Startrichtung bewegt. Er erreicht die Abwurfhöhe 0 wieder nach 5 Sekunden, und seine Geschwindigkeit ist dann wieder die Startgeschwindigkeit, allerdings wie gesehen, negativ ! Und wir wollen bedenken, daß dies so nur möglich ist, wenn wir den Luftwiderstand wegschummeln !
Die Tabelle enthält noch einen Wert für t = 6 s. Dort ist dann sogar die Höhe negativ. Das geht natürlich nur, wenn von einem Turm aus nach oben abgeworfen wird und der Körper tatsächlich unter das Abwurfniveau fallen kann.

Man erkennt jetzt auch, wie man den Gipfelpunkt einer solchen Wurfbewegung ausrechnen kann. Man fragt einfach: Wo ist die Geschwindigkeit Null ?

Gipfelbedingung: $v(t) = 0 \iff 25\tfrac{m}{s} - 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t = 0$

Daraus folgt $10\tfrac{m}{s^2} \cdot t = 25\tfrac{m}{s} \Rightarrow t = \dfrac{25\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 2{,}5\,s$

Und damit erhält man die Steighöhe: $h(2{,}5s) = 25\tfrac{m}{s} \cdot 2{,}5s - 5\tfrac{m}{s^2} \cdot 6{,}25s^2 = 31{,}25\,m$

WICHTIG:

Vielleicht ist es aufgefallen, daß in der 2. Bewegungsgleichung nicht s sondern h steht. Dies hat seinen guten Grund. s ist üblicherweise das Zeichen für den Weg (abgesehen von der Einheitsbezeichnung Sekunde) . Aber wenn man nach dem Weg fragt, den der Körper in 4 Sekunden zurückgelegt hat, dann liefert h(4s) nicht das richtige Ergebnis, sondern nur die Höhe, in der sich der Körper nach 4 Sekunden befindet, also $h(4s) = 25\tfrac{m}{s} \cdot 4\,s - 5\tfrac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 20\,m$.

Der **tatsächlich zurückgelegte Weg** berechnet sich als Steighöhe plus Weg nach unten bis zur Höhe 20 m:

$$s(4s) = 31{,}25\,m + (31{,}25\,m - 20\,m) = 42{,}5\,m$$

Man könnte also sagen: h(t) gibt eine Koordinate für den Aufenthaltsort des geworfenen Körpers an.

Wir sprachen vorhin davon daß es eine zweite Möglichkeit für das Erstellen der Bewegungsgleichungen gibt.

2. Fall:

$$v(t) = -v_0 + g \cdot t \qquad (1)$$
$$h(t) = -v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Jetzt hat v_0 ein negatives Vorzeichen. Wir legen also die Geschwindigkeitsachse nach unten und ebenfalls die Wegachse:

Dies macht dann Sinn, wenn beispielsweise von einem Fenster eines Hochhauses aus ein Stein zuerst nach oben abgeworfen wird, aber er fällt dann ganz nach unten. Wenn man die Gleichungen so anschreibt, zeigen die Bewegungsachsen nach unten. Und jeder Aufenthaltsort, der tiefer als der Abwurfplatz liegt, hat positive v- und h-Koordinaten, alles was höher liegt, negative.

Nur ein kleines Beispiel:

Abwurf in 100 m Höhe mit $v_0 = -2\,\tfrac{m}{s}$ nach oben.
Wann schlägt er in 100m Tiefe auf und mit welcher Geschwindigkeit ?

Wir verwenden obige Bewegungsgleichungen:

$$v(t) = -2\,\tfrac{m}{s} + 10\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (1)$$
$$h(t) = -2\,\tfrac{m}{s} \cdot t + 5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

Bedingung für das Aufschlagen ganz unten: $h(t_u) = 100\,m$

Ergibt in (2): $100\,m = -2\,\tfrac{m}{s} \cdot t_u + 5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t_u^{\,2}$

Ordnen nach t und mit $\tfrac{s^2}{m}$ multiplizieren:

$$5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t_u^{\,2} - 2\,\tfrac{m}{s} \cdot t_u - 100\,m = 0$$
$$5t_u^{\,2} - 2s \cdot t_u - 100\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-100s^2)}}{10} = \frac{2s \pm \sqrt{2004s^2}}{10} = \frac{2s \pm 44{,}8s}{10} = \begin{cases} 4{,}68s \\ (-4{,}28s) \end{cases}$$

Setzen wir die Flugdauer $t_u = 4{,}68\,s$ in (1) ein, dann folgt die Auftreffgeschwindigkeit:

$$v(4{,}68s) = -2\,\tfrac{m}{s} + 10\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 4{,}68s = 44{,}8\,\tfrac{m}{s}$$

Wir sehen, auf Grund der Art, wie wir jetzt die Vorzeichen angesetzt haben, erhalten wir an dieser Stelle eine positive Geschwindigkeit. Hätten wir die Gleichungen so wie im 1. Fall angelegt, wäre die Geschwindigkeit jetzt negativ geworden.

Die zweite negative Zeit kann man übrigens auch deuten: Man kann sich diese Wurfbewegung auch so vorstellen, daß nicht in 100 m Höhe nach oben abgeworfen wird, sondern unten auf dem Boden. Und zwar mit $-44{,}8\,\tfrac{m}{s}$ nach oben. Dann erreicht der Stein nach 4,28 s die 100m-Höhe, aus der tatsächlich abgeworfen worden ist.
Von da aus, war der Stein also 4,28 s vor dem **Abwurf** bereits unten auf dem Boden! Dazu gehört die negative Zeit.

Musteraufgabe mit Lösungen

Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10\frac{m}{s}$ nach oben abgeschossen.

a) Berechne die Steighöhe.

b) Wann erreicht der Körper die halbe Höhe

c) In welcher Höhe hat er die halbe Anfangsgeschwindigkeit

d) Nach welcher Zeit schlägt er auf dem Boden auf, das ist 1,5 m unterhalb der Abschußhöhe ?

Lösung

Wir beginnen stets mit den Bewegungsgleichungen:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \quad \text{d.h.} \quad v(t) = 10\tfrac{m}{s} - 10\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (1)$$

$$h(t) = v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{d.h.} \quad h(t) = 10\tfrac{m}{s} \cdot t - 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2)$$

a) Für die Steighöhe gilt die Bedingung: $v(t_S) = 0$

Daraus folgt $0 = v_0 - g \cdot t_S \Leftrightarrow g \cdot t_S = v_0 \Leftrightarrow t_S = \frac{v_0}{g}$

Die Steigzeit beträgt also $t_S = \frac{v_0}{g} = \frac{10\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 1s$.

Berechnung der Steighöhe: $h_{max} = h(t_S) = h(1s) = 10\frac{m}{s} \cdot 1s - 5\frac{m}{s^2} \cdot 1s^2 = 5m$

ACHTUNG: Man kann leicht eine **Formel für die Steighöhe** herleiten. Aus der Bedingung, daß im Gipfelpunkt die Geschwindigkeit 0 sein muß, also $v(t_S) = 0$

folgt $0 = v_0 - g \cdot t_S$ und die Steigzeit $t_S = \frac{v_0}{g}$

Dazu gehört die Steighöhe

$$h(t_S) = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{{v_0}^2}{g} - \frac{{v_0}^2}{2g} = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

Ich rate jedoch davon ab, sich in der Physik mit allen Formel vollstopfen zu wollen, die es gibt. Wer soll sich die denn alle merken ?

Wichtig ist das **Methodenwissen**: Die Steigzeit berechnet man durch die Bedingung, daß im höchsten Punkt die Geschwindigkeit momentan 0 ist. Dann folgt alles weitere.

b) Wann erreicht der Körper die halbe Höhe ?

Nun haben wir in der Aufgabenstellung schon wieder eine Bedingung gegeben:
Es soll gelten $h_{max} = 2{,}5\,m$. Das setzt man in die Gleichung (2) ein:

$$2{,}5\,m = 10\tfrac{m}{s}\cdot t - 5\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2$$

Nun liegt eine quadratische Gleichung vor, die man zunächst nach t-Potenzen ordnet und dann mit $\frac{s^2}{m}$ multipliziert. (Das geht immer so !)

$$5\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2 - 10\tfrac{m}{s}\cdot t + 2{,}5\,m = 0$$

$$5t^2 - 10s\cdot t + 2{,}5\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10s \pm \sqrt{100s^2 - 4\cdot 5\cdot 2{,}5\,s^2}}{10} = \frac{10s \pm \sqrt{50\,s^2}}{10} = \frac{10 \pm 7{,}1}{10}s \approx \begin{cases} 1{,}71\,s \\ 0{,}29\,s \end{cases}.$$

Nun muß man verstehen, warum zwei Zeiten auftreten. Und beide haben ihren Sinn!

Ganz einfach: Der Köper wird abgeschossen, erreicht nach 0,29 s die halbe Steighöhe, und nach 1 s den höchsten Punkt seiner Bahn. Dann kehrt er um und fällt zurück. Nach 1,71 s passiert er dann wieder die halbe Steighöhe und nach 2 s (die doppelte Steigzeit(ist er wieder auf Höhe der Abwurfstelle ! War das schwer ?

c) In welcher Höhe hat er die halbe Anfangsgeschwindigkeit ?

Hier wollen wir dem Irrtum vorbeugen, daß der Körper in der halben Höhe auch die halbe Geschwindigkeit hat ! Doch laßt uns rechnen:

Wieder eine Bedingung: $v(t) = \frac{1}{2}v_0 = 5\frac{m}{s}$

Eingesetzt in (1): $5\frac{m}{s} = 10\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t \;\Rightarrow\; 10\frac{m}{s^2}\cdot t = 5\frac{m}{s} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{2}s$.

Offenbar erreicht der Körper in der halben Steigzeit die halbe Startgeschwindigkeit.

Und dazu die Höhe: $h\left(\frac{1}{2}s\right) = 10\frac{m}{s}\cdot\frac{1}{2}s - 5\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{4}s^2 = 3{,}75\,m$.

Dies ist mehr als die halbe Höhe. Wir kommen gleich noch einmal darauf zurück !

d) Nach welcher Zeit schlägt er auf dem Boden auf, das ist 1,5 m unterhalb der Abschußhöhe ?

Jetzt lautet die Bedingung $h(t) = -1{,}5\,m$!!!

Eingesetzt in (2): $-1{,}5\,m = 10\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

Daraus folgt wie oben: $5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 10\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5\,m = 0 \quad \Big|\cdot\frac{s^2}{m}$

bzw. $5\cdot t^2 - 10s\cdot t - 1{,}5\,s^2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{10s \pm \sqrt{100s^2 - 4\cdot 5\cdot\left(-1{,}5s^2\right)}}{10} = \frac{10s \pm \sqrt{130s^2}}{10} \approx \frac{10 \pm 11{,}4}{10} s = \begin{cases} 2{,}14\,s \\ -0{,}14\,s \end{cases}$$

(Jetzt fällt die negative Zeit weg. Wäre der Köper von da unten gestartet, dann hätte dies 0,14 s vor dem Abwurfstart erfolgen müssen !).

Ergebnis: Nach 2,14 s schlägt er auf dem Boden auf.

Und dies mit dieser Geschwindigkeit:

$$v(2{,}14\,s) = 10\tfrac{m}{s} - 10\tfrac{m}{s^2}\cdot 2{,}14\,s = -11{,}4\tfrac{m}{s}$$

Der negative Wert zeigt die Abwärtsbewegung an.

WICHTIG!

Nun wollen wir die Aufgaben b) und c) ***ganz allgemein lösen***.
Dies sind wichtige Übungen mit Formeln, die Schülern lange sehr schwer fallen.

Wir gehen also von einem beliebigen senkrechten Wurf aufwärts aus und fragen, wann der Körper die halbe Steighöhe erreicht hat,

Hier die Bewegungsgleichungen :

$$v(t) = v_0 - g\cdot t \qquad (1)$$

$$h(t) = v_0\cdot t - \tfrac{1}{2} g\cdot t^2 \qquad (2)$$

Die Steighöhe haben wir allgemein schon auf Seite 8 berechnet: $h_{max} = \frac{v_0^{\,2}}{2g}$.

Wir haben somit diese Bedingung: $h(t) = \frac{v_0^{\,2}}{4g}$

Eingesetzt in (2):

$$\frac{v_0^{\,2}}{4g} = v_0\cdot t - \tfrac{1}{2} g\cdot t^2 \quad \Big|\cdot 4g \quad \text{(Brüche weg !)}$$

$$v_0^{\,2} = 4g\cdot v_0\cdot t - 2g^2\cdot t^2$$

Ordnen:

$$2g^2\cdot t^2 - 4gv_0\cdot t + v_0^{\,2} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4gv_0 \pm \sqrt{16g^2v_0^2 - 4\cdot 2g^2v_0^2}}{4g^2} = \frac{4gv_0 \pm \sqrt{8g^2v_0^2}}{4g^2} = \frac{4gv_0 \pm gv_0 2\sqrt{2}}{4g^2}$$

Nun kürzen wir durch $2g$:

$$t_{1,2} = \frac{2v_0 \pm v_0\sqrt{2}}{2g} = \frac{\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}{2g}\cdot v_0 \approx \begin{cases} [0{,}17\cdot v_0] \\ [0{,}03\cdot v_0] \end{cases}$$

Verwenden wir wie oben $v_0 = 10\tfrac{m}{s}$, erhalten wir dieselbe Zeiten wie oben !

Es gelingt also hier, fertige Formeln für solche „Ereignisse" zu errechnen.
Noch ein Beispiel: Wo ist die halbe Anfangsgeschwindigkeit erreicht ?

Bedingung: $v(t) = \frac{1}{2} v_0$

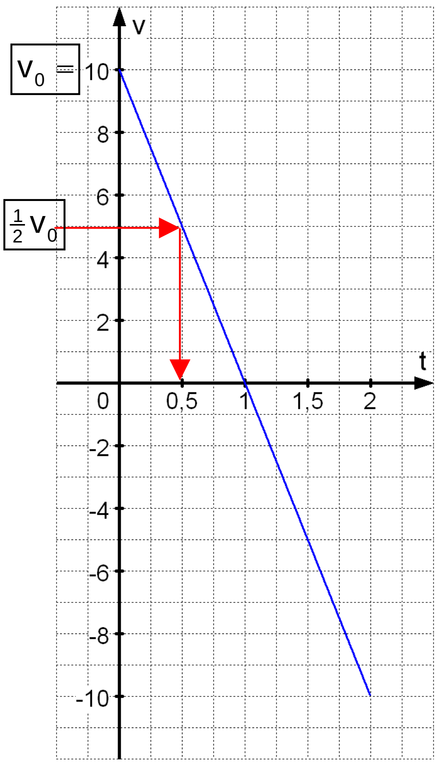
Eingesetzt in (1): $\frac{1}{2} v_0 = v_0 - g \cdot t \;\Rightarrow\; g \cdot t = \frac{1}{2} v_0 \;\Rightarrow\; t = \frac{v_0}{2g}$

und das ist genau die halbe Steigzeit (Seite 8) !

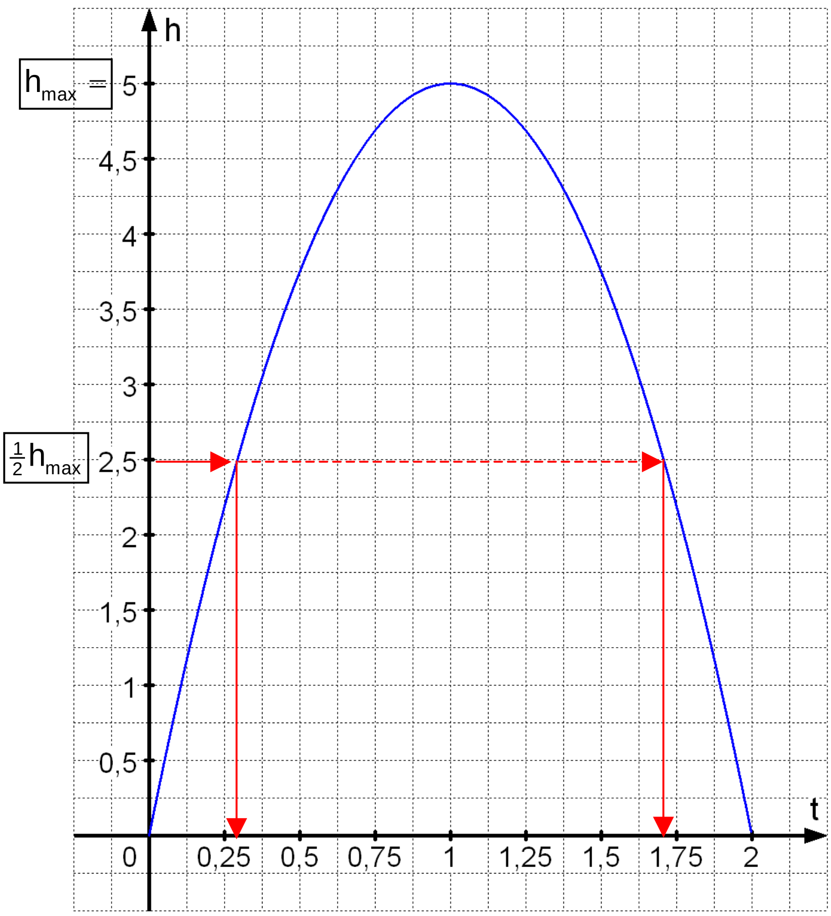
Abschließend noch eine Betrachtung zu dem Tatbestand, daß halbe Steighöhe und halbe Steigzeit nicht zum selben Zeitpunkt erreicht werden können.

Dazu stellen wir die beiden Bewegungsgleichungen in Schaubildern dar:

$v(t) = 10\,\frac{m}{s} - 10\,\frac{m}{s^2} \cdot t$



$h(t) = 10\,\frac{m}{s} \cdot t - 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$



Man erkennt, daß das v-t-Gesetz linear ist und eine Gerade zum Schaubild hat, während das s-t-Gesetz eine Parabel ergibt. Daher ist der halbe Maximalwert nicht bei gleichen Zeitpunkten erreichbar !

Der Trick mit der umgekehrten Bewegung !

Im Text zur Bremsbewegung (91113 Seite 10) wurde ein Gedankenexperiment durchgeführt. Dieses soll hier beim senkrechten Wurf nach oben wiederholt werden.

Das Experiment besteht darin, daß wir den senkrechten Wurf nach oben einfach mit einer Kamera filmen. Wir schneiden den Film genau da ab, wo der Gipfelpunkt mit $v(t_S) = 0$ erreicht ist, t_S ist ja unsere Steigzeit.

Ja und zur Belustigung aller lassen wir den Film nun rückwärts laufen. Und wir sehen, wie dieser Körper aus der Höhe h_S (Steighöhe) einen ganz normalen freien Fall macht, also ganz ohne Anfangsgeschwindigkeit, denn er hat ja oben die Geschwindigkeit 0 ! Und dieser Körper erreicht in der Zeit t_S den Punkt, aus der er in Wirklichkeit abgeworfen worden ist.

Sehen Sie, was dies uns bringt ? Wir brauchen dann nur noch mit den einfachen Gleichungen des freien Falls zu rechnen.

Schauen wir uns das an einem Beispiel an:

Der Körper wird mit $v_0 = 15\,\frac{m}{s}$ senkrecht nach oben abgeworfen.
(Bisher hatten dir dann aus der Haltebedingung am Gipfelpunkt $v(t_S) = 0$ die Steigzeit und damit die Steighöhe berechnet).

Jetzt errechnen wir aus der umgekehrten Bewegung, die ein freier Fall ist, sofort die Steighöhe:

$$v = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{225}{20}\,m = 11{,}25\,m\,.$$

Oder die Steigzeit: $v = gt \Rightarrow t = \frac{v}{g} = \frac{20}{10}\,s = 2s$

Dieser kleine Trick kürzt ab, ist aber ohne Texthinweis auf die „umgekehrte Bewegung“ nicht zulässig !

3. Aufgaben

(1) Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30\,\frac{m}{s}$ nach oben abgeschossen.

a) Berechne seine Höhe und Geschwindigkeit nach 2,5 s.
b) Wie groß ist seine maximale Steighöhe und die Steigzeit ?
c) Wann erreicht der Körper die Höhe 40 m und welche Geschwindigkeit hat er dort ?
d) Wann erreicht er wieder seine Abschußhöhe ?
e) Wenn der Ort des Abwurfs ein Fenster ist, das 40 m über dem Erdboden liegt, wann erreicht der Körper dann den Erdboden und mit welcher Geschwindigkeit ?

(2) Ein Körper wird vom Erdboden aus senkrecht nach oben abgeschossen. Er erreicht in 75 m Höhe die Geschwindigkeit $v_1 = 10\,\frac{m}{s}$:
Wie groß war seine Abschußgeschwindigkeit ?
Wie lange hat der Körper für diese 75 m benötigt ?

(3) Ein Körper wird mit $5\,\frac{m}{s}$ nach unten in einen 60 m tiefen Schacht geworfen.
a) Wie lange fällt er und mit welcher Geschwindigkeit schlägt er auf ?
b) Wie viele Meter legt er in der letzten Sekunde zurück ?
c) Wieviel Prozent seiner Endgeschwindigkeit hat er in der halben Tiefe erreicht ?

(4) Vom Erdboden aus werden zur Zeit $t = 0$ gleichzeitig zwei Körper A und B nach oben abgeschossen.

a) Welche Höhe erreicht A, wenn er mit $v_A = 12\,\frac{m}{s}$ abgeschossen wird ?
Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_B muß B abgeschossen werden, damit er viermal so hoch wie A steigen kann ?

b) Berechne die Steigzeiten für beide Körper.
Wo befindet sich B, wenn A seinen Kulminationspunkt erreicht hat, und wo ist A, wenn B ganz oben ist ?

c) Berechne die Abstände beider Körper nach 1 s, 2 s und 3 s.
Stelle eine Formel für den Abstand der Körper A und B in Abhängigkeit von der Zeit auf. Welchen Definitionsbereich (für t)hat diese Formel ?
Was gilt danach ?

(5) Körper B wird 0,5 s nach Körper A mit derselben Geschwindigkeit abgeschossen.
In welcher Höhe begegnen sie sich ?
Rechne zuerst mit $v_0 = c\,\frac{m}{s}$ und dann mit $c = 10$.

(6) (Abitur 1969)

Ein Körper soll auf die Höhe $h = 80$ m gebracht werden und zwar auf folgende Arten:

a) Er wird senkrecht nach oben geworfen.
Wie groß muß seine Anfangsgeschwindigkeit gewählt werden ?

b) Er wird aus der Ruhe heraus längs der Teilstrecke $h_1 = 30$ m gleichmäßig so beschleunigt, daß er über die Teilstrecke hinaus noch die Höhe h erreichen kann.
Wie groß ist die notwendige Beschleunigung a ?
Wie lange braucht der Körper, bis er ganz oben ist ?

(Es sei $g = 10\,\frac{m}{s^2}$; der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen)

4. Lösungen

(1) Mit $v_0 = 30\frac{m}{s}$ lauten die Bewegungsgleichungen

$v(t) = v_0 - g\cdot t$ d.h. $v(t) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t$ (1)

$h(t) = v_0\cdot t - \frac{1}{2}g\cdot t^2$ d.h. $h(t) = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$ (2)

(a) Nach 2,5 s werden erreicht:

$$v(2{,}5\,s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 2{,}5\,s = 5\frac{m}{s}$$

$$h(2{,}5\,s) = 30\frac{m}{s}\cdot 2{,}5\,s - 5\frac{m}{s^2}\cdot(2{,}5\,s)^2 = 75\,m - 31{,}25\,m = 43{,}75\,m$$

(b) Maximale Höhe und Steigzeit: Bedingung für den höchsten Punkt:

$$v(t_S) = 0 \;\Leftrightarrow\; 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 3\,s$$

Steighöhe: $h(3\,s) = 30\frac{m}{s}\cdot 3\,s - 5\frac{m}{s^2}\cdot 9\,s^2 = 45\,m$

(c) Situation bei h = 40 m:

Aus (2): $40\,m = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$$5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 30\frac{m}{s}\cdot t + 40\,m = 0 \quad \Big|\, : 5\frac{m}{s^2}$$

$$t^2 - 6s\cdot t + 8s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{6s \pm \sqrt{36s^2 - 32s^2}}{2} = \frac{6s \pm 2s}{2} = \begin{cases} 4s \\ 2s \end{cases}$$

Zugehörige Geschwindigkeiten:

$v(4\,s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 4\,s = -10\frac{m}{s}$ und $v(2\,s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 2\,s = 10\frac{m}{s}$

Man erkennt, daß sich der Körper nach 2 s in 40 m Höhe befindet und sich mit $10\frac{m}{s}$ aufwärts bewegt. Nach 4 s ist er wieder dort, jedoch in seiner Abwärtsbewegung (negative Geschwindigkeit).

(d) Die Abschußhöhe wird wieder erreicht, wenn h = 0 ist:

Aus (2): $0 = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$ (jetzt t ausklammern !) $0 = \left(30\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s^2}\cdot t\right)\cdot t$

Der Faktor t liefert t = 0, das war der Start. Die Klammer liefert t = 6 s . Doch dies kann man sich alles sparen, denn die Zeit bis zur Abschußhöhe zurück ist die doppelte Steigzeit. Und die Geschwindigkeit ist dann genau so groß wir beim Abschuß !

(e) Erreichen des Bodens bedeutet h = - 40 m in (2) einsetzen:

$$-40\,m = 30\frac{m}{s}\cdot t - 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \;\Leftrightarrow\; 5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 - 30\frac{m}{s}\cdot t - 40\,m = 0 \quad \Big|\, : 5\frac{m}{s}$$

$$t_{1,2} = \frac{6s \pm \sqrt{36s^2 + 32s^2}}{2} = \frac{6s \pm 8{,}25\,s}{2} = \begin{cases} 7{,}1s \\ (-1{,}1s) \end{cases}$$

Zugehörige Geschwindigkeit:

$$v(7{,}1s) = 30\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2}\cdot 7{,}1s = -41\frac{m}{s}$$

(2) Gegeben: Ein Körper erreicht in 75 m Höhe die Geschwindigkeit $v_1 = 10\,\frac{m}{s}$

Bewegungsgleichungen:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \qquad (1)$$

$$h(t) = v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Wir setzen in beide Gleichungen ein:

$$10\,\tfrac{m}{s} = v_0 - g \cdot t \quad \Big|\cdot t \qquad (1)$$

$$75\,m = v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

$$10\,\tfrac{m}{s} \cdot t = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 \qquad (1')$$

$$75\,m = v_0 \cdot t - \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Subtraktion (2) – (1):

$$75\,m - 10\,\tfrac{m}{s} \cdot t = \tfrac{1}{2} g t^2$$

Ordnen (alles nach rechts) und vereinfachen:

$$5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 + 10\,\tfrac{m}{s} \cdot t - 75\,m = 0 \quad \Big| : 5\,\tfrac{m}{s^2}$$

$$t^2 + 2s \cdot t - 15\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2s \pm \sqrt{4s^2 + 60s^2}}{2} = \frac{-2s \pm 8s}{2} = \begin{cases} 3s \\ (-5s) \end{cases}$$

Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit aus (1):

$$10\,\tfrac{m}{s} = v_0 - 10\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 3s \quad \text{ergibt} \quad v_0 = 10\,\tfrac{m}{s} + 30\,\tfrac{m}{s} = 40\,\tfrac{m}{s}$$

(3) Ein Körper wird mit $5\,\frac{m}{s}$ nach unten in einen 60 m tiefen Schacht geworfen.

(a) Bewegungsgleichungen:

$v(t) = v_0 + g \cdot t$ d.h. $v(t) = 5\,\frac{m}{s} + 10\,\frac{m}{s^2} \cdot t$ (1)

$h(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$ d.h. $h(t) = 5\,\frac{m}{s} \cdot t + 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ (2)

Bedingung für das Auftreffen: $h(t) = 60\text{ m}$

(Jetzt zählen wir die Tiefe positiv, weil wir die ganze Bewegung nach unten ausrichten!)

$$60\,m = 5\,\frac{m}{s} \cdot t + 5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Ordnen und vereinfachen:

$$5\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 + 5\,\frac{m}{s} \cdot t - 60\,m = 0 \quad \Big| : 5\,\frac{m}{s^2}$$

$$t^2 + 1s \cdot t - 12\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1s \pm \sqrt{1s^2 + 48\,s^2}}{2} = \frac{-1s \pm 7\,s}{2} = \begin{cases} 3s \\ (-4s) \end{cases}$$

Auftreffgeschwindigkeit:

$$v(3s) = 5\,\frac{m}{s} + 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 3\,s = 35\,\frac{m}{s}$$

(b) Der Weg in der letzten Sekunde:

$$h(2s) = 5\,\frac{m}{s} \cdot 2s + 5\,\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2 = 30\,m$$

$h(3s) = 60\,m$ (Schachttiefe)

Differenz also 30 m.

(c) Wie man aus (b) erkennt, ist er nach 2 s in der halben Tiefe.
Dort hat er die Geschwindigkeit

$$v(2s) = 5\,\frac{m}{s} + 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 25\,\frac{m}{s}$$

Die Auftreffgeschwindigkeit betrug $v(3s) = 35\,\frac{m}{s}$.

Also sind $25\,\frac{m}{s}$

$$p = \frac{25\,\frac{m}{s}}{35\,\frac{m}{s}} \cdot 100\% = 71{,}4\%$$

der Endgeschwindigkeit.

(4) Vom Erdboden aus werden zur Zeit $t = 0$ gleichzeitig zwei Körper A und B nach oben abgeschossen.

a) Welche Höhe erreicht A, wenn er mit $v_A = 12\,\frac{m}{s}$ abgeschossen wird ?
Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_B muß B abgeschossen werden, damit er viermal so hoch wie A steigen kann ?

Die Steighöhe kann man aus der umgekehrten Bewegung, also dem Freien

Fall berechnen: $v_A = \sqrt{2gh_A} \Rightarrow h_A = \frac{v_A^{\,2}}{2g} = \frac{144\,\frac{m^2}{s^2}}{20\,\frac{m}{s^2}} = 7{,}2\,m$

Dann gilt für B: $v_B = \sqrt{2g\cdot 4h_A} = 2\sqrt{2gh_A} = 2\cdot v_A = 24\,\frac{m}{s}$!!!

b) Steigzeiten für beide Körper.

Aus der umgekehrten Bewegung folgt:

$$v = g\cdot t_S \Rightarrow t_{S,A} = \frac{v_A}{g} = \frac{12}{10}s = 1{,}2s$$

$$t_{S,B} = \frac{v_B}{g} = \frac{24}{10}s = 2{,}4s$$

$$h_B(1{,}5\,s) = 24\,\tfrac{m}{s}\cdot 1{,}5\,s - 5\,\tfrac{m}{s^2}\cdot 2{,}25\,s^2 = 24{,}75\,m$$

(Zum Vergleich: Die Steighöhe von B ist $4\cdot 7{,}2m = 28{,}8m$)

$$h_A(2{,}4s) = 12\,\tfrac{m}{s}\cdot 2{,}4\,s - 5\,\tfrac{m}{s^2}\cdot(2{,}4\,s)^2 = 0$$

Das hätte man eigentlich nicht berechnen müssen, denn B steigt doppelt so lang wie A, also ist A wieder unten angekommen !

c) Wir stellen eine Formel für diesen Abstand auf, indem wir die Höhen subtrahieren:

$$\Delta h(t) = h_B(t) - h_A(t) = \left(24\,\tfrac{m}{s}\cdot t - 5\,\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2\right) - \left(12\,\tfrac{m}{s}\cdot t - 5\,\tfrac{m}{s^2}\cdot t^2\right) = 12\,\tfrac{m}{s}\cdot t$$

Also: $\Delta h(1s) = 12\,m$

$\Delta h(2\,s) = 24\,m$

$\Delta h(3\,s) = 36\,m$

Aber der letzte Wert ist falsch, denn die Formel gilt ja nur, so lange A noch nicht unten aufgeschlagen ist, also lautet der Definitionsbereich für die Zeit in dieser Formel: $\mathbf{D}_t = [0\,s\,;\,2{,}4\,s]$.
Für $t = 3$ s muß man daher anders rechnen: h_A ist dann immer 0.

$$\Delta h(3\,s) = h_B(3\,s) - h_A(3s) = \left(24\,\tfrac{m}{s}\cdot 3\,s - 5\,\tfrac{m}{s^2}\,9s^2\right) - 0m = 27\,m$$

(5) Körper B wird 0,5 s nach Körper A mit derselben Geschwindigkeit abgeschossen. In welcher Höhe begegnen sie sich ? Rechne zuerst mit $v_0 = c\,\frac{m}{s}$ und dann mit c = 10.

Bewegungsgleichungen

A: $v_A(t) = v_0 - g\cdot t$

$s_A(t) = v_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

B: $v_B(t) = v_0 - g\cdot(t - 0{,}5\,s)$

$s_B(t) = v_0\cdot(t-0{,}5\,s) - \frac{1}{2}g(t-0{,}5\,s)^2$

Bedingung: $s_A(t) = s_B(t)$

$$v_0\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 = v_0\cdot(t-0{,}5\,s) - \tfrac{1}{2}g(t-0{,}5\,s)^2$$

$$v_0\cdot t - \tfrac{1}{2}gt^2 = v_0\cdot t - v_0\cdot 0{,}5s - \tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{1}{2}g\cdot 1s\cdot t - \tfrac{1}{2}g\cdot\tfrac{1}{4}s^2$$

$$0 = -v_0\cdot 0{,}5s + g\cdot\tfrac{1}{2}s\cdot t - g\cdot\tfrac{1}{8}s^2$$

$$0 = -c\tfrac{m}{s}\cdot 0{,}5s + 10\tfrac{m}{s^2}\cdot\tfrac{1}{2}s\cdot t - 10\tfrac{m}{s^2}\cdot\tfrac{1}{8}s^2$$

$$0 = -c\cdot 0{,}5\,m + 5\tfrac{m}{s}\cdot t - 1{,}25\,m$$

$$5\tfrac{m}{s}\cdot t = c\cdot 0{,}5\,m + 1{,}25\,m$$

$$t = \frac{(c\cdot 0{,}5 + 1{,}25)\,m}{5\,\frac{m}{s}} = (c\cdot 0{,}1 + 0{,}25)\,s$$

Für c = 10, also $v_0 = 10\frac{m}{s}$ folgt $t = 1{,}25\,s$

Und nun die Höhe:

A: $h_A(1{,}25\,s) = 10\cdot 1{,}25\,s - 5\frac{m}{s^2}\cdot(1{,}25\,s)^2 = 4{,}6875\,m$

B: $h_B(1{,}25\,s) = 10\frac{m}{s}\cdot(1{,}25\,s - 0{,}5\,s) - 5\frac{m}{s^2}(1{,}25s - 0{,}5\,s)^2$

$h_B(1{,}25\,s) = 10\frac{m}{s}\cdot 0{,}75\,s - 5\frac{m}{s^2}(0{,}75\,s)^2 = 4{,}6875\,m$

Die Berechnung der Höhe h_B hätten wir uns sparen können, denn sie sollen sich ja in der gleichen Höhe begegnen. Dennoch: Diese Rechnung kann als Kontrolle dienen.

(6) Gegeben ist also $h = 80$ m.

a) Bewegungsgleichungen für den senkrechten Wurf nach oben:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \qquad (1)$$
$$h(t) = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

Da der Körper oben zum Halten kommt, folgern wir aus der umgekehrten Bewegung (dem freien Fall aus 80 m Höhe):

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 80m} = \sqrt{1600}\,\tfrac{m}{s} = 40\,\tfrac{m}{s}.$$

Oder so:

Bedingung für den Gipfelpunkt: $v(t_S) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = v_0 - g t_S \;\Leftrightarrow\; t_S = \frac{v_0}{g}$

Diese Steigzeit setzt man in (2) ein:

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \tfrac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Und daraus: $v_0^2 = 2gh \;\Rightarrow\; v_0 = \sqrt{2gh} = 40\,\tfrac{m}{s}$.

(Wie umständlich!)

b) Er wird aus der Ruhe heraus längs der Teilstrecke $h_1 = 30$ m gleichmäßig so beschleunigt, daß er über die Teilstrecke hinaus noch die Höhe h erreichen kann. Wie groß ist die notwendige Beschleunigung a ?

Wenn der Körper entlang h_1 beschleunigt wird, muß er noch die Höhe $h - h_1$ im Wurf überwinden. Gemäß a) benötigt er dazu die Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2g(h - h_1)}\,.$$

Und genau diese Geschwindigkeit steht am Ende der Beschleunigungsstrecke. Also gilt für diese gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$$v_1 = \sqrt{2ah_1}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{2ah_1} = \sqrt{2g(h - h_1)}$$

d. h. $2ah_1 = 2g(h - h_1)$

ergibt $a = \frac{h - h_1}{h_1} \cdot g = \frac{50}{30} \cdot g = \frac{5}{3} g \approx 16{,}7\,\tfrac{m}{s^2}$

Wie lange braucht der Körper, bis er ganz oben ist ?

Beschleunigungszeit: $h_1 = \tfrac{1}{2} a t_1^2 \;\Rightarrow\; t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} \approx 1{,}9$ s

Steigzeit: $h - h_1 = \tfrac{1}{2} g t_2^2 \;\Rightarrow\; t_2 = \sqrt{\frac{2(h - h_1)}{g}} \approx 3{,}2$ s

Gesamtzeit: $t \approx 5{,}1$ s.