PHYSIK

Geradlinige Bewegungen

Teil 3

Gleichmäßig beschleunigte Bewegungen mit Anfangsgeschwindigkeit

Datei Nr. 91113

Friedrich W. Buckel

Juli 2002

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1. Grundlagen: Beschleunigte Bewegungen

WISSEN: Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung (die dann vorliegt, wenn eine konstante Antriebskraft vorhanden ist) gelten folgende Gesetze (Gleichungen):

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \textit{konstant} = a \quad \text{bzw. auch} \quad \frac{v}{t} = a.$$

Weg-Zeit-Gesetz: $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz: $v(t) = a \cdot t$

Geschwindigkeits-Weg-Gesetz: $v(s) = \sqrt{2as}$

Dabei ist s der aus der Ruhe in der Zeit t zurückgelegte Weg und v die aus der Ruhe in der Zeit t erreichte Geschwindigkeit.

Wir wollen jetzt Bewegungen anschauen, die zum Zeitpunkt t = 0 nicht in der Ruhe sind, sondern schon eine (Anfangs-)Geschwindigkeit v_0 haben !

Gedankenexperiment

Stellen wir uns eine hinreichend lange und reibungsfrei funktionierende Fahrbahn vor, auf der ein Wagen bewegungslos steht und dann (zur Zeit t = 0) mit der konstanten Beschleunigung $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ anfährt.

Nach 5 Sekunden hat unser Wagen die Strecke $s(5\,s) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot (5\,s)^2 = 10\,m$ auf seiner Fahrbahn zurückgelegt. Er hat dann die Geschwindigkeit $v(5\,s) = 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 4\,\frac{m}{s}$ erreicht.

So, das war aber nur die halbe Wahrheit. Denn was Sie bis jetzt noch nicht wissen, ist die Tatsache, daß sich diese Fahrbahn auf einem Zug befindet, der sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 3\,\frac{m}{s}$ gleichförmig in dieselbe Richtung bewegt, in der wir unseren Testwagen auf seiner Fahrbahn starten lassen.

Versetzen wir uns in die Lage eines Beobachters, der außerhalb des Zuges steht und folgendes sieht: Es nähert sich ein Zug mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 3\,\frac{m}{s}$. Auf diesem Zug befindet sich eine Fahrbahn, und darauf startet zur Zeit t = 0 eine Wagen mit der konstanten Beschleunigung $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$.
Damit legt der Wagen für diesen Beobachter in jenen besagten 5 Sekunden zusammen mit dem Zug die Wegstrecke $s = v_0 \cdot t = 3\,\frac{m}{s} \cdot 5\,s = 15\,m$ zurück (die gleichförmige Zugbewegung) und zusätzlich auf dem Zug die oben berechnete Wegstrecke $s(5\,s) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot (5\,s)^2 = 10\,m$.

Für diesen Beobachter hat sich also der Wagen um insgesamt 25 m bewegt und nach diesen 4 Sekunden die Geschwindigkeit $3\,\frac{m}{s} + 4\,\frac{m}{s} = 7\,\frac{m}{s}$ erreicht.

Dasselbe können wir jetzt ohne diesen Zug durchführen. Wir denken uns die hinreichend lange Fahrbahn auf die Erde montiert und lassen darauf den Wagen mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 3\,\frac{m}{s}$ fahren. Zu einem bestimmten Zeitpunkt (wie definieren dies wieder als $t = 0$) beschleunigt dieser Wagen mit $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$. Damit erreicht man dieselben Werte für Weg und Zeit. Wir müssen diesen Vorgang als Überlagerung zweier Bewegungen verstehen.

MERKE: Beschleunigt ein Körper zur Zeit t = 0, in der er bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_o besitzt, dann führt er quasi eine überlagerte Bewegung durch, nämlich einerseits die aus seiner Anfangsgeschwindigkeit resultierende gleichförmige Bewegung und dazu die durch die Beschleunigung entstehende gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Es gelten daher diese ***Bewegungsgleichungen***:

Weg-Zeit-Gleichung: $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (1)

Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung: $v(t) = v_O + a \cdot t$ (2)

Die einfachste Anwendung der Gleichungen (1) und (2) ist:

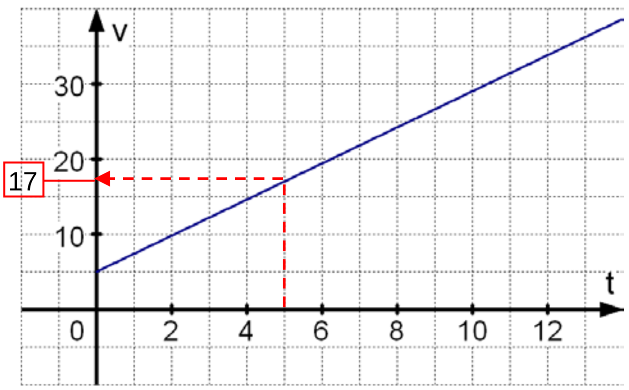
Ein Fahrzeug wird aus der Geschwindigkeit $v_O = 5\,\frac{m}{s}$ heraus gleichmäßig mit $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt. Berechne den in t = 6 s zurückgelegten Weg und die dann vorhandene Geschwindigkeit. Zeichne das v-t-Diagramm und das s-t-Diagramm.

Die Bewegungsgleichungen lauten jetzt:

$$v(t) = v_O + a \cdot t = 5\,\tfrac{m}{s} + 2{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t$$

$$\Rightarrow\ v(5s) = 5\,\tfrac{m}{s} + 2{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 17\,\tfrac{m}{s}$$

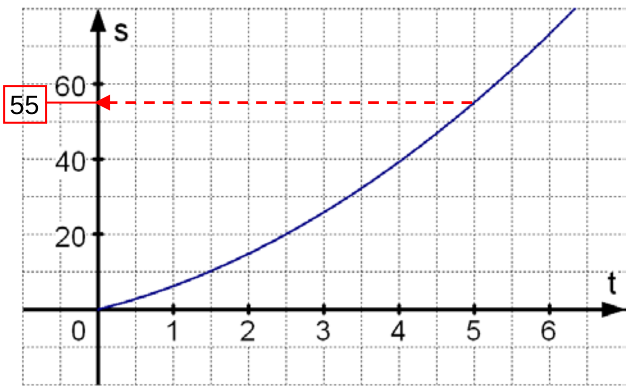
Das v-t-Diagramm zeigt eine Gerade:



$$s(t) = v_O \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 = 5\,\tfrac{m}{s} \cdot t + 1{,}2\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow\ s(5s) = 5\,\tfrac{m}{s} \cdot 5\,s + 1{,}2\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 25\,s^2 = 55\,m$$

Das s-t-Diagramm zeigt eine Parabel



2. Rechenbeispiele

(1) Ein Körper wird aus der Geschwindigkeit $3\,\frac{m}{s}$ heraus gleichmäßig beschleunigt.
Die Beschleunigung sei $0{,}2\,\frac{m}{s^2}$.
Wie lange fährt er, bis er 67,5 m zurückgelegt hat,
und welche Endgeschwindigkeit hat er dann ?

Gegeben sind also $v_O = 3\,\frac{m}{s}$, $a = 0{,}2\,\frac{m}{s^2}$ und $s = 67{,}5\,m$.

Die Gleichung $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ enthält daher nur die Unbekannte t:

$$67{,}5\,m = 3\,\tfrac{m}{s} \cdot t + 0{,}1\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad \Big|: \tfrac{m}{s^2}$$

$$67{,}5\,s^2 = 3\,s \cdot t + 0{,}1 \cdot t^2 \quad \Big| \cdot 10$$

$$t^2 + 30\,s \cdot t - 675\,s^2 = 0$$

WISSEN: Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat die Lösung $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hier ist a = 1, b = 30 s und c = - 675 s^2 . Also folgt:

$$t_{1,2} = \frac{-30\,s \pm \sqrt{900\,s^2 - 4 \cdot \left(-675\,s^2\right)}}{2} = \frac{-30\,s \pm \sqrt{3600\,s^2}}{2} = \frac{-30\,s \pm 60\,s}{2} = \begin{cases} 15\,s \\ (-45\,s) \end{cases}$$

Da eine negative Zeit hier bedeutungslos ist, kennen wir jetzt die Fahrzeit mit 15 s.
Das ergibt die Endgeschwindigkeit

$$v(15\,s) = v_0 + a \cdot 15\,s = 3\,\tfrac{m}{s} + 0{,}2\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 15\,s = 6\,\tfrac{m}{s}$$

(2) Ein Körper wird 10 s lang gleichmäßig beschleunigt und erreicht dann auf der Strecke 105 m die Geschwindigkeit 18,5 $\frac{m}{s}$.
Welche Anfangsgeschwindigkeit und welche Beschleunigung besaß er ?

Gegeben sind nun $s(10) = 105\,m$ und $v(10s) = 18{,}5\,\frac{m}{s}$.

Bewegungsgleichungen:

$$s(t) = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad (2)$$

Eingesetzt:

$$105\,m = v_0 \cdot 10\,s + \tfrac{1}{2} a \cdot 100\,s^2 \qquad (1)$$
$$18{,}5\,\tfrac{m}{s} = v_0 + a \cdot 10\,s \qquad (2)$$

Wir haben ein System aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten v_0 und a gegeben. Eine Lösungsmöglichkeit ist die Elimination von v_0. Dazu multipliziert man (2) mit 10s und subtrahiert (2') – (1):

$$105\,m = v_0 \cdot 10\,s + \tfrac{1}{2} a \cdot 100\,s^2 \qquad (1)$$
$$185\,m = v_0 \cdot 10\,s + a \cdot 100\,s^2 \qquad (2')$$

(2') – (1): $80\,m = \tfrac{1}{2} a \cdot 100\,s^2$

$$a = \frac{80\,m}{50\,s^2} = 1{,}6\,\tfrac{m}{s^2}$$

Aus Gleichung (2) folgt dann: $18{,}5\,\tfrac{m}{s} = v_0 + 1{,}6\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 10\,s$

d.h. $v_0 = 18{,}5\,\tfrac{m}{s} - 16\,\tfrac{m}{s} = 2{,}5\,\tfrac{m}{s}$

(3) Ein Körper wird mit $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ gleichmäßig beschleunigt und erreicht auf der Strecke 40 m die Geschwindigkeit $10\,\frac{m}{s}$.
Welche Anfangsgeschwindigkeit besaß er und wie lange wurde beschleunigt?

Gegeben sind jetzt $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$, $v(t) = 10\,\frac{m}{s}$ und $s(t) = 40\,m$.

Bewegungsgleichungen:
$$s(t) = v_O \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad (2)$$

Eingesetzt:
$$40\,m = v_0 \cdot t + 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$10\,\tfrac{m}{s} = v_0 + 0{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2)$$

Wir haben ein System aus 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten v_0 und t gegeben.
Eine Lösungsmöglichkeit ist die Elimination von v_0. Dazu multipliziert man (2) mit t und subtrahiert (2') – (1):

$$40\,m = v_0 \cdot t + 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$10\,\tfrac{m}{s} \cdot t = v_0 \cdot t + 0{,}8\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (2')$$

(2) – (1):
$$10\,\tfrac{m}{s} \cdot t - 40\,m = 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für t und muß geordnet werden:

$$0{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 - 10\,\tfrac{m}{s} \cdot t + 40\,m = 0 \quad \Big| : 0{,}4\,\tfrac{m}{s^2}$$
$$t^2 - 25\,s \cdot t + 100\,s^2 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{25\,s \pm \sqrt{625\,s^2 - 400\,s^2}}{2} = \frac{25\,s \pm \sqrt{225\,s^2}}{2} = \frac{25\,s \pm 15\,s}{2} = \begin{cases} 20\,s \\ 5\,s \end{cases}.$$

Kann dies möglich sein, daß es zwei verschiedene Fahrzeiten gibt ????
Wir setzen beide Zeiten in (2) ein und berechnen die Anfangsgeschwindigkeit:

Für t = 5 s: $10\,\frac{m}{s} = v_0 + 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot t \Rightarrow v_0 = 10\,\frac{m}{s} - 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 10\,\frac{m}{s} - 4\,\frac{m}{s} = 6\,\frac{m}{s}$!!!

Für t = 20 s: $v_0 = 10\,\frac{m}{s} - 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 20\,s = 10\,\frac{m}{s} - 16\,\frac{m}{s} = -6\,\frac{m}{s}$.

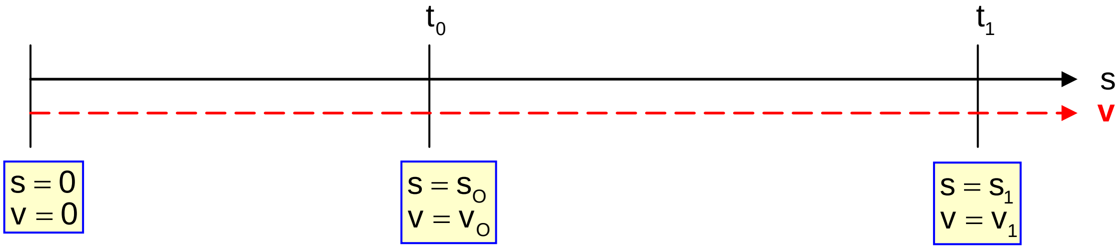
Man erkennt, daß im Falle 20 s der Körper in der „falschen“ Richtung startet.
Die Beschleunigung bremst ihn also zuerst bis auf 0 ab und beschleunigt ihn dann, so daß er dann bei der *Wegmarke* 40 m auch die Geschwindigkeit $10\,\frac{m}{s}$ hat.

Ein realistisches Beispiel dafür ist die Mondlandung: Das Landemodul fällt auf die Mondoberfläche herunter. Dieser Fall wird immer stärker abgebremst, indem die Besatzung Düsentriebwerke zum Bremsen einsetzt. Diese sollen die Geschwindigkeit passend herabregeln, so daß sie auf der Mondoberfläche 0 geworden ist, daß also die erwünschte „weiche“ Landung stattfindet. Vergißt man nun das Abschalten dieser Triebwerke, wird die Rakete sofort wieder beschleunigt und zwar in der gleichen Richtung wie zuvor, also nach oben, worauf das Fahrzeug wieder abhebt.

(4) Ein Körper bewegt sich zur Zeit $t_0 = 0$ mit der Geschwindigkeit v_o und legt dann gleichmäßig beschleunigt die Strecke s zurück.
Zeige, daß er dann eine Geschwindigkeit v erreicht, die man mit dieser Gleichung berechnen kann:

$$v^2 = v_O^2 + 2as$$

Beweis:



Die Skizze soll den gesamten Bewegungsablauf darstellen.
Wenn das Fahrzeug zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit v_o hat, dann denken wir uns das Fahrzeug zuvor gleichmäßig aus der Ruhe heraus beschleunigt.

Der Starpunkt sei am linken Ende. ´

Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus gilt die Formel $v = \sqrt{2as}$.

Also gilt für die zur Zeit t_O erreichte Geschwindigkeit: $v_O = \sqrt{2as_O}$

Wir lassen das Fahrzeug unverändert weiter beschleunigen und erhalten zum Zeitpunkt t_1 diese Geschwindigkeit: $v_1 = \sqrt{2as_1}$

Wir quadrieren beide Gleichungen:

$$v_O^2 = 2as_O \quad (1)$$

$$v_1^2 = 2as_1 \quad (2)$$

Dann subtrahieren wir (2) – (1):

$$v_1^2 - v_O^2 = 2as_1 - 2as_O = 2a\left(s_1 - s_O\right) = 2a \cdot \Delta s$$

Für einen beliebigen Zeitpunkt t statt t_1 erhält man dann eine Geschwindigkeit v mit $v^2 - v_O^2 = 2a \cdot \Delta s$.

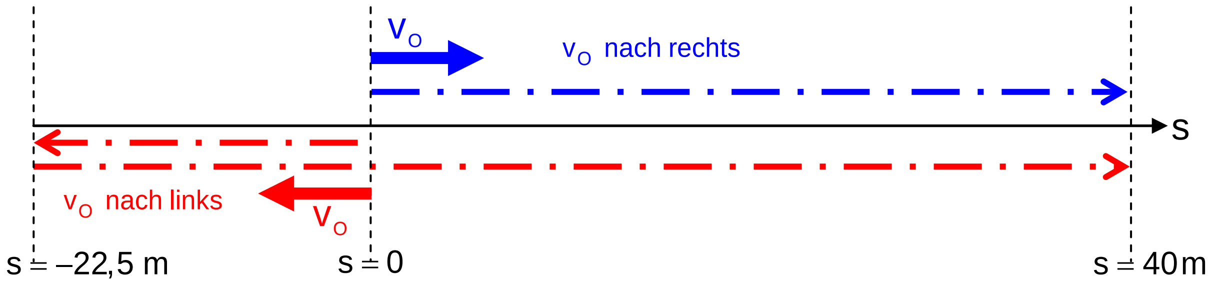
Schreibt man für die ab t_O zurückgelegte Wegstrecke statt Δs einfach nur s, dann erhält man die zu beweisende Gleichung:

$$v^2 = v_O^2 + 2as.$$

3. Grundlagen: Bremsbewegungen

Wir schauen uns das Beispiel (3) von Seite 5 nochmals genauer an, und zwar den seltsamen Fall, daß das Fahrzeug 20 s unterwegs ist und zuerst in entgegengesetzter Richtung beschleunigt wird. Dazu eine Skizze.

Sie sollten dieses Beispiel gründlich durchdenken, damit Sie ein tieferes Verständnis für diese Zusammenhänge bekommen !



Die <u>obere Situation</u> zeigt den Körper, der mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 6\,\frac{m}{s}$ ***nach rechts*** fährt und dann 5 s lang mit $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ ***nach rechts*** beschleunigt wird. Er erreicht dann die Geschwindigkeit $v(5\,s) = 6\,\frac{m}{s} + 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 10\,\frac{m}{s}$

Die <u>untere Situation</u> zeigt einen Körper, der mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 6\,\frac{m}{s}$ ***nach links*** fährt und dann 20 s lang mit $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ ***nach rechts*** beschleunigt wird. Er erreicht dann die Geschwindigkeit

$$v(5\,s) = -6\,\frac{m}{s} + 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 20\,s = 10\,\frac{m}{s}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit mußte jetzt mit einem Minuszeichen versehen werden, weil sie der endgültigen Bewegungsrichtung, in der auch beschleunigt wird, entgegenwirkt.

Dabei legen beide Körper auch Wege zurück. Nun muß man sich aber klar machen, daß mit der Gleichung $s(t) = v_O \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$ nicht unbedingt der zurückgelegte Weg berechnet wird sondern die ***Wegmarke***, bei der sich der Körper zur Zeit t befindet !!!
s ist also eine Weg-Koordinate !!!

Körper 1: $s(5\,s) = 6\,\frac{m}{s} \cdot 5\,s + 0{,}4\,\frac{m}{s^2} \cdot (5\,s)^2 = 30\,m + 10\,m = 40\,m$

Körper 2: $s(20\,s) = -6\,\frac{m}{s} \cdot 20\,s + 0{,}4\,\frac{m}{s^2} \cdot (20s)^2 = -120\,m + 160\,m = 40\,m$.

Beide Körper befinden sich somit ***an derselben Stelle*** wenn der erste 5 Sekunden lang und der zweite 20 Sekunden lang gefahren ist. Der erste Körper hat dann 40 m zurückgelegt. Der zweite dagegen viel mehr, denn er fährt zuerst nach links. Nun ist die Frage, wie lange und wie weit der nach links fährt, bis er zum Halten kommt und dann durch die immer noch nach rechts wirkende Beschleunigung wieder nach rechts beschleunigt wird.

Bewegung des 2. Körpers nach links:

Es liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor, bei der allerdings die Beschleunigung der Anfangsgeschwindigkeit entgegenwirkt. Daher spricht man auch von einer gleichmäßig verzögerten Bewegung.

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$s(t) = v_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \qquad (2)$$

Wir müssen nun klären, daß der Körper letztendlich nach rechts läuft, daß also die Anfangsgeschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung geht, daher erhält sie ein negatives Vorzeichen:

$$s(t) = -6\tfrac{m}{s} \cdot t + 0{,}4\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = -6\tfrac{m}{s} + 0{,}8\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2)$$

Im Haltepunkt links außen hat der Körper die Geschwindigkeit 0, daher wollen wir auch dies zur Bedingung machen:

Bedingung für den Haltepunkt: $v(t_H) = 0$.

Damit folgt aus (2) die Fahrzeit t_H bis zum Haltepunkt:

$$0 = -6\tfrac{m}{s} + 0{,}8\tfrac{m}{s^2} \cdot t_H \;\Rightarrow\; 0{,}8\tfrac{m}{s^2} \cdot t_H = 6\tfrac{m}{s} \;\Rightarrow\; t_H = \frac{6\frac{m}{s}}{0{,}8\frac{m}{s^2}} = 7{,}5\,s$$

Und in dieser Zeit legt der Körper diese Strecke zurück (es ist der Bremsweg):

$$s(7{,}5\,s) = -6\tfrac{m}{s} \cdot 7{,}5\,s + 0{,}4\tfrac{m}{s^2} \cdot (7{,}5\,s)^2 = -22{,}5\,m$$

Von da aus wirkt die Beschleunigung nun so daß die Geschwindigkeit wieder zu nimmt. Da er bereits 7,5 s unterwegs ist, bleiben noch 12,5 s Bewegung übrig. In dieser Zeit beschleunigt er aus der Ruhe heraus, d.h. es gelten die vereinfachten Gesetze

$$s(t) = \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 = 0{,}4\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = 0{,}8\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2)$$

aber (Vorsicht) gemessen von linken Haltepunkt aus.

Lassen wir ihn also nun 12,5 s lang fahren, das ergibt

$$s(12{,}5\,s) = 0{,}4\tfrac{m}{s^2} \cdot (12{,}5\,s)^2 = 62{,}5\,m$$

und $$v(12{,}5\,s) = 0{,}8\tfrac{m}{s^2} \cdot 12{,}5\,s = 10\tfrac{m}{s}$$

Die gesamte Wegstrecke des zweiten Fahrzeugs ist also s_{ges} = 22,5 m + 62,5m = 85 m. Behält man das Minuszeichen der nach links orientierten ersten Wegstrecke bei, dann erhält man s_{ges} = - 22,5 m + 62,5m = 40 m, und das ist wieder die Wegmarke.

Aus diesem Beispiel konnte man erfahren, wie es sich mit der Bremsbewegung verhält: Die Beschleunigung und die Anfangsgeschwindigkeit wirken in verschiedenen Richtungen. Daher gibt man einer davon ein Minuszeichen. In der Regel ist dies die Beschleunigung. In diesem Beispiel war es anders, weil das Fahrzeug nach dem Halten umgekehrt weitergefahren ist.

MERKE: Beschleunigt ein Körper zur Zeit t = 0, in der er bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_o besitzt, in der entgegengesetzten Richtung, dann nennt man die beschleunigte Bewegung eine Bremsbewegung. Ist die wirkende Bremskraft konstant spricht man von einer gleichmäßig verzögerten Bewegung

Es gelten daher diese ***Bewegungsgleichungen***:

Weg-Zeit-Gleichung: $s(t) = v_O \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$ (1)

Geschwindigkeits-Zeit-Gleichung: $v(t) = v_O - a \cdot t$ (2)

ACHTUNG: Jetzt steht das Minuszeichen bereits in der Formel, dann nimmt man für die Bremsverzögerung a eine positive Maßzahl.

Wirkt die Bremsverzögerung über den Haltepunkt hinaus beschleunigend, dann verwendet man eine positive Beschleunigung und eine negative Startgeschwindigkeit wie in Beispiel zuvor.

Mit diesen Bewegungsgleichungen kann man Ort und Geschwindigkeit des Fahrzeugs berechnen, wenn man seine Anfangsgeschwindigkeit und seine Bremsverzögerung kennt.

Der ***Bremsweg*** wird, wie zuvor schon gezeigt, durch diese Bedingung berechnet:

Am Haltepunkt ist die Geschwindigkeit 0, also

Bedingung für den Bremsweg: $\boxed{v(t_H) = 0}$

Die damit ermittelte Zeit setzt man in die Weg-Zeit-Gleichung ein.

Dies kann man auch allgemein durchrechnen:

Aus (2) folgt: $0 = v_O - a \cdot t_H \Rightarrow a \cdot t_H = v_O \Rightarrow t_H = \frac{v_O}{a}$ (Bremsdauer)

Eingesetzt in (1): $s(t_H) = v_O \cdot \frac{v_O}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v_O}{a}\right)^2 = \frac{{v_O}^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{{v_O}^2}{a} = \frac{1}{2} \frac{{v_O}^2}{a}$

Es wird jedoch empfohlen, sich diese Formel für den Bremsweg nicht zu merken. Die Fülle der Formeln wird zu groß. Es wird im nächsten Abschnitt jedoch ein Trick gezeigt, wie man sie schneller herleiten kann !

4. Musterbeispiele

(1) Ein Fahrzeug fährt mit $v_0 = 108\,\frac{km}{h}$ und wird dann gleichmäßig abgebremst. Die Bremsverzögerung sei $7{,}5\,\frac{m}{s^2}$.

a) Berechne die Geschwindigkeit, die das Fahrzeug nach 2 s noch hat, wie weit ist es in diesen 2 Sekunden gefahren ?

b) Berechne die Geschwindigkeit, die das Fahrzeug nach 5 s noch hat, wie weit ist es in diesen 5 Sekunden gefahren ? Deute das Ergebnis.

c) Berechne den Bremsweg und die Bremsdauer.

Lösung:

Vorbereitung: Gegeben ist $v_0 = 108\,\frac{km}{h} = \frac{108}{3{,}6}\,\frac{m}{s} = 30\,\frac{m}{s}$ und $a = 7{,}5\,\frac{m}{s^2}$.

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$s(t) = v_O \cdot t - \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = v_0 - a \cdot t \qquad (2)$$

mit den gegebenen Daten:

$$s(t) = 30\,\tfrac{m}{s} \cdot t - 3{,}75\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = 30\,\tfrac{m}{s} - 7{,}5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2)$$

a) $s(2s) = 30\,\frac{m}{s} \cdot 2s - 3{,}75\,\frac{m}{s^2} \cdot 4s^2 = 60m - 15m = 45m$

$v(2s) = 30\,\frac{m}{s} - 7{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 2s = 30\,\frac{m}{s} - 15\,\frac{m}{s} = 15\,\frac{m}{s}$.

(Aus der Weg-Gleichung erkennt man: Ohne das Abbremsen hätte das Fahrzeug in diesen 2 s 60 m zurückgelegt, die Bremsverzögerung hat 15 m weggenommen.)

b) $s(5s) = 30\,\frac{m}{s} \cdot 5s - 3{,}75\,\frac{m}{s^2} \cdot 25s^2 = 150m - 93{,}75m = 56{,}25m$

$v(5s) = 30\,\frac{m}{s} - 7{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 5s = 30\,\frac{m}{s} - 37{,}5\,\frac{m}{s} = -7{,}5\,\frac{m}{s}$.

An dieser negativen Geschwindigkeit erkennt man, daß die Fahrzeit 5 s bereits länger ist als die Bremsdauer. Würde die Bremsbeschleunigung nach dem Halten weiter wirken, würde das Fahrzeug in der entgegengesetzten Richtung starten und dann die Geschwindigkeit $7{,}5\,\frac{m}{s}$ erreichen.
Das Minuszeichen zeigt an, daß sieh der Körper bereits wieder zurück bewegt !

c) Bedingung für den Haltepunkt: $v(t_H) = 0$. Dies wird in (2) eingesetzt:

$$0 = 30\,\tfrac{m}{s} - 7{,}5\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t_H \;\Rightarrow\; 7{,}5\,\tfrac{m}{s} \cdot t_H = 30m \;\Rightarrow\; t_H = \frac{30m}{7{,}5\,\frac{m}{s}} = 4s.$$

Bremsweg: $s(4s) = 30\,\frac{m}{s} \cdot 4s - 3{,}75\,\frac{m}{s^2} \cdot 16s^2 = 120m - 60m = 60m$.

(2) Kurzlösung für die Bremswegberechnung

Ich verwende noch einmal die Werte der Aufgabe (1):
Ein Fahrzeug fährt mit $v_0 = 108\,\frac{km}{h}$ und wird dann gleichmäßig abgebremst.
Die Bremsverzögerung sei $7{,}5\,\frac{m}{s^2}$.
Berechne den Bremsweg.

GEDANKENSPIEL

Wir stellen uns vor, das Fahrzeug führt diese Bremsbewegung durch und fährt bis zum Haltepunkt. Den ganzen Vorgang haben wir gefilmt. Und nun lassen wir den Film rückwärts ablaufen und sehen das Fahrzeug vom Haltepunkt aus beschleunigt starten. Es fährt so lange, bis es die Geschwindigkeit $v_0 = 108\,\frac{km}{h}$ erreicht hat, macht also eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus.

Dafür gelten bekannterweise drei einfache Gleichungen:

Weg-Zeit-Gesetz:	$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2$
Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:	$v(t) = a \cdot t$
Geschwindigkeits-Weg-Gesetz:	$v(s) = \sqrt{2as}$

Für unsere umgekehrte Bewegung kennen wir v und a, und wir suchen s, unseren Bremsweg. Also verwenden wir die letzte der drei Formeln und lösen sie nach s auf:

$$s = \frac{v^2}{2a}$$

Dies ist die Bremswegformel !!!!

Setzen wir also ein:

$$s = \frac{900\,\frac{m^2}{s^2}}{15\,\frac{m}{s^2}} = 60\,m$$

Und schon haben wir den Bremsweg berechnet.

> Merke: Die Berechnung des Bremsweges gelingt auf 2 Arten:
>
> (1) Aus der Haltebedingung $v(t_H) = 0$ berechnet man die Bremsdauer t_H und setzt diese in die $s(t)$ – Formel ein.
>
> (2) Man berechnet aus der umgekehrten Bewegung mittels $v(s) = \sqrt{2as}$ die Wegstrecke s, die zur Startgeschw. v_o gehört. Dazu ist aber eine Erklärung notwendig !

(3) Ein Fahrzeug macht eine Vollbremsung und hinterläßt eine Bremsspur von 48 m. Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit, wenn man von einer durchschnittlichen Bremsverzögerung von $6\,\frac{m}{s^2}$ ausgehen kann ?

Nach welcher Strecke und Zeit hatte das Fahrzeug nur noch die halbe Geschwindigkeit ?

Nach welcher Zeit hatte es den halben Bremsweg zurückgelegt und wie groß war dort seine Geschwindigkeit ?

Lösung:

Gegeben sind also der Bremsweg von $s = 48\,m$ und die Bremsverzögerung $a = 6\,\frac{m}{s^2}$.

Wir betrachten die umgekehrte Bewegung, bei der das Fahrzeug aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigt wird. Dann erreicht es die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 6\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 48\,m} = \sqrt{576}\,\tfrac{m}{s} = 24\,\tfrac{m}{s}.$$

Für die Bremsbewegung war dies die Anfangsgeschwindigkeit.

Die Bewegungsgleichungen für die Bremsbewegung lauten:

$$s(t) = v_O \cdot t - \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = v_0 - a \cdot t \qquad (2)$$

Also hier:

$$s(t) = 24\,\tfrac{m}{s} \cdot t - 3\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = 24\,\tfrac{m}{s} - 6\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2)$$

Die <u>halbe Geschwindigkeit</u> bedeutet $v(t) = 12\,\frac{m}{s}$. Damit folgt aus (2):

$$12\,\tfrac{m}{s} = 24\,\tfrac{m}{s} - 6\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t_1 \;\Rightarrow\; 6\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t_1 = 12\,\tfrac{m}{s} \;\Rightarrow\; t_1 = 2\,s$$

Der zugehörige Fahrweg ist dann:

$$s(2\,s) = 24\,\tfrac{m}{s} \cdot 2\,s - 3\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 4\,s^2 = 36\,m$$

Der <u>halbe Bremsweg</u> bedeutet $s(t) = 24\,m$. Damit folgt aus (1):

$$24\,m = 24\,\tfrac{m}{s} \cdot t - 3\,\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \quad \Big|\, :3\,\tfrac{m}{s^2}$$
$$8\,s^2 = 8\,s \cdot t - t^2$$
$$t^2 - 8\,s \cdot t + 8\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{8\,s \pm \sqrt{64\,s^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8\,s^2}}{2} = \frac{8\,s \pm \sqrt{32\,s^2}}{2} = \frac{8 \pm 5{,}66}{2}\,s = \begin{cases} 6{,}83\,s \\ 1{,}83\,s \end{cases}$$

Hier muß man stets die kleinere Zeit verwenden. Die größere Zeit gehört zu dem Gedankenexperiment, daß der Körper weiterfährt bis zum Haltepunkt und dann in entgegengesetzte Richtung beschleunigt wird. Nach 6,83 s kommt er dann von der anderen Richtung her zur Marke 24 m ! (Siehe Seite 6/7)

(4) Ein Fahrzeug wird gleichmäßig abgebremst, legt dabei in 5 Sekunden den Weg 60 m zurück und erreicht die Geschwindigkeit $6\,\frac{m}{s}$.
Berechne die vor dem Abbremsen vorhandene Geschwindigkeit v_0 sowie die Bremsverzögerung. Wie groß ist der Bremsweg bis zum Halten?

Lösung:

Gegeben ist $s(5\,s) = 60\,m$ und $v(5\,s) = 6\,\frac{m}{s}$.

Die Bewegungsgleichungen für die Bremsbewegung lauten:

$$s(t) = v_O \cdot t - \tfrac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = v_0 - a \cdot t \qquad (2)$$

Setze wir ein:

$$60\,m = v_O \cdot 5\,s - \tfrac{1}{2} a \cdot 25\,s^2 \qquad (1')$$
$$6\,\tfrac{m}{s} = v_0 - a \cdot 5\,s \qquad (2')$$

Wir multiplizieren die Gleichung (1) mit 2 und die Gleichung (2) mit 10 s . Dann subtrahieren wir (1') – (2'):

$$120\,m = v_O \cdot 10\,s - a \cdot 25\,s^2 \qquad (1'')$$
$$60\,m = v_0 \cdot 10\,s - a \cdot 50\,s^2 \qquad (2'')$$

$$60\,m = a \cdot 25\,s^2$$

Dies ergibt:

$$a = \frac{60\,m}{25\,s^2} = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$$

Damit folgt aus (2):

$$v_0 = 6\,\tfrac{m}{s} + a \cdot 5\,s = 6\,\tfrac{m}{s} + 2{,}4\,\tfrac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 18\,\tfrac{m}{s}.$$

Es fehlt nun noch der Bremsweg:

Für die umgekehrte Bewegung gilt:

$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(18\,\frac{m}{s}\right)^2}{4{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 67{,}5\,m$$

(6) Ein Fahrzeug wird gleichmäßig abgebremst und reduziert dabei auf einer Strecke von 48 m seine Geschwindigkeit auf ein Fünftel.
Die Bremsverzögerung wird mit $a = 4\frac{m}{s^2}$ angegeben.

Berechne die Anfangsgeschwindigkeit und den ganzen Bremsweg bis zum Halten..

Lösung:

Gegeben sind jetzt diese Werte: $s(t) = 48\,m$, $v(t) = \frac{1}{5}v_0$ und $a = 4\frac{m}{s^2}$

Die Bewegungsgleichungen für die Bremsbewegung lauten:

$$s(t) = v_O \cdot t - \tfrac{1}{2}a \cdot t^2 \qquad (1)$$
$$v(t) = v_0 - a \cdot t \qquad (2)$$

Setzen wir ein:

$$48\,m = v_O \cdot t - 2\tfrac{m}{s^2} \cdot t^2 \qquad (1')$$
$$\tfrac{1}{5}v_0 = v_0 - 4\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (2')$$

Hier liegen 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten vor. Dieses System kann man durch das Subtraktionsverfahren lösen (siehe Beispiel (3) Seite 4) oder aber – was sich hier besonders anbietet – mit dem Einsetzungsverfahren. Dazu stellen wir die Gleichung (2') nach v_0 um:

$$\tfrac{1}{5}v_0 = v_0 - 4\tfrac{m}{s^2} \cdot t \Rightarrow \tfrac{4}{5}v_0 = 4\tfrac{m}{s^2} \cdot t \Rightarrow v_0 = 5\tfrac{m}{s^2} \cdot t \qquad (3)$$

In (1): $48\,m = 5\frac{m}{s^2} \cdot t \cdot t - 2\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

Ergibt $3\frac{m}{s^2} \cdot t^2 = 48\,m \Rightarrow t^2 = 16\,s^2 \Rightarrow t = 4\,s.$

Eingesetzt in (3): $v_0 = 5\frac{m}{s^2} \cdot 4\,s = 20\frac{m}{s}.$

Es fehlt nun noch der Bremsweg:

Für die umgekehrte Bewegung gilt:

$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(20\frac{m}{s}\right)^2}{8\frac{m}{s^2}} = 50\,m$$

Weitere Beispiele finden Sie in der Datei „Wurfbewegungen“, denn der senkrechte Wurf nach oben ist (zumindest im aufsteigenden Teil) auch eine Bremsbewegung !

5. Zwei spezielle Aufgaben

(1) Ein Körper starte zur Zeit t = 0, beschleunige dann 4 Sekunden lang mit $a = 3\frac{m}{s^2}$, fahre dann 5 s lang gleichförmig und bremse dann so ab, daß das Fahrzeug nach weiteren 6 Sekunden zum Stehen kommt.

Welchen Weg hat das Fahrzeug insgesamt zurückgelegt ?

Lösung:

Diese Aufgabe erscheint sehr einfach. Sie besteht aus drei Teilbewegungen:

(1) **Gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus der Ruhe heraus**

Es gilt: $s_1(t) = \frac{1}{2}a_1 \cdot t^2 \Rightarrow s_1(4s) = 1{,}5\frac{m}{s^2} \cdot 16\frac{m^2}{s^2} = 24m$

Und ferner: $v_1(t) = a \cdot t \Rightarrow v_1(4s) = 3\frac{m}{s^2} \cdot 4s = 12\frac{m}{s}$

(2) **Gleichförmige Bewegung**

Wir legen den Nullpunkt der Zeitachse für diese Rechnung an den Beginn der gleichförmigen Bewegung, dann gilt:

$$s_2(t) = v_1(4s) \cdot t \Rightarrow s_2(5s) = 12\frac{m}{s} \cdot 5s = 60m$$

(3) **Bremsbewegung**

Auch hier legen wir t = 0 in den Beginn der Bremsbewegung. Achtung: Wir müssen eine zweite Beschleunigung verwenden, daher steht oben a_1 und hier jetzt a_2 :

$$s_3(t) = v_2(4s) \cdot t - \frac{1}{2}a_2 t^2 \qquad (1)$$
$$v_3(t) = v_1(4s) - a_2 \cdot t \qquad (2)$$

d.h.

$$s_3(t) = 12\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2}a_2 t^2 \qquad (1)$$
$$v_3(t) = 12\frac{m}{s} - a_2 \cdot t \qquad (2)$$

Bedingung für den Haltepunkt: $v_3(6s) = 0$:

d.h. $0 = 12\frac{m}{s} - a_2 \cdot 6s \Rightarrow a_2 \cdot 6s = 12\frac{m}{s} \Rightarrow a_2 = 2\frac{m}{s^2}$

Damit folgt aus (1): $s(6s) = 12\frac{m}{s} \cdot 6s - 1\frac{m}{s^2} \cdot 36s^2 = 36m$

(4) Zusammensetzen der Wegstrecken:

Gesamtwegstrecke: $s = 24m + 60m + 36m = 120m$

Nun wollen wir das v – t – Diagramm für die Gesamtbewegung ermitteln

Die v-t-Gleichungen lauten:

Im ersten Teil: $v_1(t) = 3\frac{m}{s^2}\cdot t$

Im zweiten Teil: $v_2(t) = 12\frac{m}{s}$ (konstant)

Im dritten Teil: $v_3(t) = 12\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2}\cdot t$

Nun wollen wir zur Übung dies an eine Zeitachse anpassen, die ihren Ursprung $t = 0$ bei Beginn der Bewegung hat.

Es gilt somit $v(t) = 3\frac{m}{s^2}\cdot t$ für $0 \le t \le 4\,s$

Dann gilt weiter $v(t) = 12\frac{m}{s}$ für $4\,s \le t \le 9\,s$

Und schließlich: $v(t) = 12\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2}\cdot(t - 9\,s)$

Bzw. $v(t) = -2\frac{m}{s^2}\cdot t + 30\frac{m}{s}$ für $9\,s \le t \le 15\,s$

(Hier muß man von der Zeitkoordinate die 9 Sekunden abziehen, die vor der Bremsbewegung liegen !)

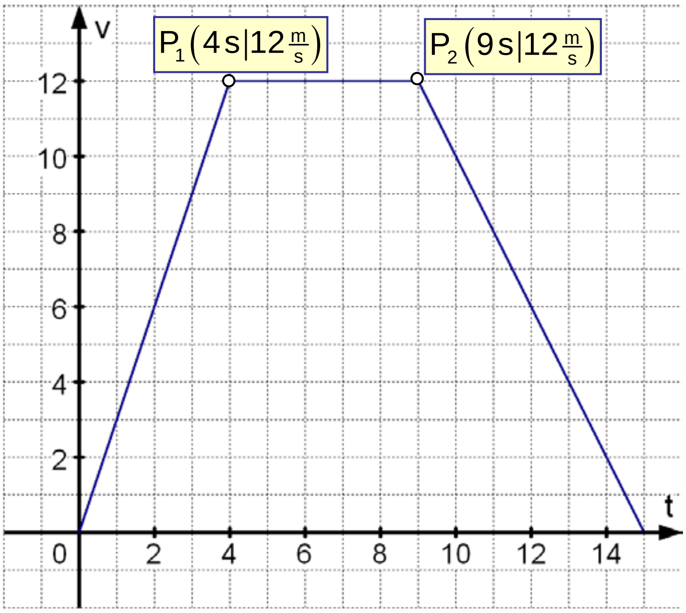
In der mathematischen Funktionsschreibweise sollte man dies so darstellen:

$$v(t) = \begin{cases} 3\frac{m}{s^2}\cdot t & \text{für } 0 \le t \le 4\,s \\ 12\frac{m}{s} & \text{für } 4\,s \le t \le 9\,s \\ 12\frac{m}{s} - 2\frac{m}{s^2}\cdot(t-9\,s) & \text{für } 9\,s \le t \le 15\,s \end{cases}$$

Und nun das Diagramm.

Hinweis:
Um das Diagramm zu erstellen benötigt man hier nicht einmal die Geschwindigkeitsfunktion.

Es genügt, die Zustandspunkte P_1 und P_2 einzuzeichnen.
Die letzte Strecke führt dann bis zum Haltepunkt auf die t-Achse, den man durch die Angabe „Bremszeit = 6 s“ findet.



Der insgesamt zurückgelegte Weg ist nun die Fläche unter diesem Trapez:

Trapezformel: $A = \frac{1}{2}(a+c)\cdot h$, d.h. hier:

$$s = \frac{1}{2}(15+5)\cdot 12 = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 12 = 120\ (m)$$

Geht das nicht einfach ?

(2) Zwei Fahrzeuge fahren aufeinander zu. Fahrzeug A hat die Geschwindigkeit $v_A = 30\frac{m}{s}$, Fahrzeug B $v_B = 40\frac{m}{s}$. Sie erkennen diese Situation im selben Moment als sie noch 400 m voneinander entfernt sind. Sie bremsen daraufhin mit den Verzögerungen $a_A = 3\frac{m}{s^2}$ und $a_B = 5\frac{m}{s^2}$ ab.
Überprüfe, ob sie einen Zusammenstoß vermeiden können, und wenn ja, in welchem Abstand voneinander sie zum Halten kommen.

Lösung

Jetzt kommt eine neue Situation hinzu, nämlich, daß das Fahrzeug B auch noch eine Wegkoordinate für den Zeitpunkt $t = 0$ bekommen muß, in dem es zu bremsen beginnt.

Notieren wir die Bewegungsgleichungen.

Für A:
$$v_A(t) = 30\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s^2}\cdot t$$
$$s_A(t) = 30\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

Für B:
$$v_B(t) = -\left(40\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s^2}\cdot t\right) = -40\frac{m}{s} + 5\frac{m}{s^2}\cdot t$$
$$s_B(t) = 400m - (40\frac{m}{s}\cdot t - 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2) = 400m - 40\frac{m}{s}\cdot t + 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

Zur Erklärung: Fahrzeug B befindet sich zur Zeit $t = 0$ an der Wegmarke (Weg-Koordinate 400 m) und fährt dann auf A zu, d.h. die Weg-Koordinate wird um die zurückgelegte Fahrstrecke verkürzt, weshalb man die Wegstrecke davon abziehen muß.
Analog dazu erhält die Geschwindigkeit ein Minuszeichen, weil die Fahrt „nach links" geht.

Berechnen wir nun die Bremswege. Dazu verwenden wir wieder die Umgekehrte Bewegung, also die gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus dem Haltepunkt heraus zurück mit der Formel
$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow s^* = \frac{v^2}{2a}.$$

Dann erhalten wir für das Fahrzeug A: $$s_A^* = \frac{900\frac{m^2}{s^2}}{6\frac{m}{s^2}} = 150\,m$$

Und für B: $$s_A^* = \frac{1600\frac{m^2}{s^2}}{10\frac{m}{s^2}} = 160\,m$$

Das heißt, der Haltepunkt von B befindet sich an der Wegmarke $s_B = 400\,m - 160\,m = 240\,m$, während A bei 150 m hält. Die Fahrzeuge haben also noch 90 m Abstand, wenn sie zum Stillstand gekommen sind.

Wir spinnen diese Aufgabe weiter.

Wie lange müssen beide Fahrzeuge bremsen ?

Hierzu verwenden wir die Bedingung für den Haltepunkt, und die lautet $V(t_H) = 0$.

Das ergibt für das Fahrzeug A wegen $v_A(t) = 30\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s^2}\cdot t$

die Bremsdauer $0 = 30\frac{m}{s} - 3\frac{m}{s^2}\cdot t \Rightarrow t = 10\,s$.

und für B: $0 = -40\frac{m}{s} + 5\frac{m}{s^2}\cdot t \Rightarrow t = 8\,s$.

Daher stellen wir jetzt die Zusatzfrage:

Wo befinden sich die Fahrzeuge 5 s nach Beginn des Bremsvorgangs ?

Fahrzeug A: $s_A(t) = 30\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$$s_A(5\,s) = 30\frac{m}{s}\cdot 5\,s - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot 25\,s^2 = 150\,m - 37{,}5\,m = 112{,}5\,m$$

Fahrzeug B: $s_B(t) = 400m - 40\frac{m}{s}\cdot t + 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$

$$s_B(5\,s) = 400m - 40\frac{m}{s}\cdot 5\,s + 2{,}5\frac{m}{s^2}\cdot 25\,s^2 = 400\,m - 200\,m + 62{,}5\,m = 262{,}5\,m$$

Dies sind die Wegkoordinaten der beiden Fahrzeuge:
A ist bei 112,5 m und B bei 262,5 m.
Sie sind also noch genau 150 m voneinander entfernt.

Schließlich eine letzte Aufgabe dazu:

Wir lassen nun beide Fahrzeuge mit $a = 3\frac{m}{s^2}$ abbremsen. Es sei verraten, daß nun nicht mehr rechtzeitig zum Halten kommen. Es gibt einen Zusammenstoß. Wir wollen berechnen wo und wann der stattfindet und welche Geschwindigkeiten dann noch beide Fahrzeuge haben.

Die Lösung ist einfach, wenn man sich darüber im Klaren ist, daß die Weg-Gleichung Koordinaten berechnet. Wenn es zum Zusammenstoß kommt, dann an derselben Wegmarke. Wir berechnen diesen „Schnittpunkt" durch Gleichsetzen. Dabei wurde allerdings dem Fahrzeug B die neue Bremsverzögerung mitgegeben:

$$400m - 40\frac{m}{s}\cdot t + 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2 = 30\frac{m}{s}\cdot t - 1{,}5\frac{m}{s^2}\cdot t^2$$

$$400m - 70\frac{m}{s}\cdot t + 3\frac{m}{s^2}\cdot t^2 = 0 \quad \Big| : \frac{m}{s^2}$$

$$3\,t^2 - 70\,s + 400\,s^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{70\,s \pm \sqrt{4900\,s^2 - 4800\,s^2}}{6} = \frac{70\,s \pm \sqrt{100\,s^2}}{6} = \frac{70 \pm 10}{6}\,s = \begin{cases} 13{,}3\,s \\ 10\,s \end{cases}$$

Es wurde schon einmal erwähnt, daß man in so einem Fall stets den kleineren Zeitwert nehmen muß. Der größere läßt sich so interpretieren, daß die Fahrzeuge (nach dem Passieren des Zusammenstoßpunktes irgendwann zum Halten kommen würden und dann bei fortgesetzter Beschleunigung rückwärts starten und sich wieder treffen würden. Dazu gehört die größere Zeit!)

Wir beobachten also nach genau 10 Sekunden den Zusammenstoß. Nun berechnen wir den Ort, wo sich die beiden Fahrzeuge dann befinden:

Fahrzeug A: $s_A(10\,s) = 30\,\frac{m}{s} \cdot 10\,s - 1{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 100\,s^2 = 300\,m - 150\,m = 150\,m$

Fahrzeug B: $s_B(10) = 400m - 40\,\frac{m}{s} \cdot 10\,s + 1{,}5\,\frac{m}{s^2} \cdot 100\,s^2 = 400\,m - 400\,m + 150\,m$

Natürlich befinden sich A und B beiden an der selben Stelle, d.h. bei der Wegmarke 150 m !!

Und nun die Geschwindigkeiten:

Fahrzeug A: $v_A(10\,s) = 30\,\frac{m}{s} - 3\,\frac{m}{s^2} \cdot 10\,s = 0\,\frac{m}{s}$

Fahrzeug B: $v_B(t) = -40\,\frac{m}{s} + 3\,\frac{m}{s^2} \cdot 10\,s = -10\,\frac{m}{s}$

Wir wissen also: Im Augenblick des Zusammenstoßes ist A gerade zum Halten gekommen, während B mit der Geschwindigkeit $10\,\frac{m}{s}$ auf A aufprallt.

Hinweis:

Wer die Aufgabe weiter ausbauen will, kann nun den Beginn es Bremsvorgangs noch auf verschiedene Zeitpunkte legen. Wenn etwa B 1 Sekunde nach A mit dem Bremsen beginnt, dann muß dort statt t die verkürzte Zeit (t – 1s) verwendet werden, denn wenn 2 Sekunden vergangen sind, hat B erst 1 Sekunde gebremst usw.