PHYSIK

Geradlinige Bewegungen

Teil 2

Gleichmäßig beschleunigte Bewegungen

Datei Nr. 91112

Friedrich W. Buckel

Stand: 18. Dezember 2011

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1. Grundlagen

Dieser Text soll kein Lehrbuchersatz sein, in dem nun gründlich in die gleichmäßig beschleunigte Bewegung eingeführt wird. Vielmehr werden die wesentlichen Gedanken und Fakten dargelegt und die Bewegungsgleichungen mit allerlei Rechnungen vertieft.

Ohne eine Antriebskraft ändert ein Fahrzeug seine Geschwindigkeit nicht. Wir setzen daher eine konstante Antriebskraft irgendwelcher Art voraus. Im Experiment beobachtet man, daß dann das Fahrzeug immer schneller fährt.

Problem Nr. 1:

Wer bisher nur die gleichförmige Bewegung besprochen hat, kennt nur den dort eingeführten Geschwindigkeitsbegriff, der auf die Proportionalität von Wegstrecke und Zeitspanne zurückgeht:

Wenn $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ konstant bleibt, nennt man diesen Quotienten die Geschwindigkeit der zugrunde liegenden gleichförmigen Bewegung.

Es muß nun selbst dem Schüler klar sein, daß man diesen Geschwindigkeitsbegriff nicht verwenden kann, wenn die Bewegung beschleunigt ist, weil ja dann besagter Quotient eben nicht konstant bleibt. Also ist ein neuer Geschwindigkeitsbegriff für diese Art der Bewegung zu definieren.

Problem Nr. 2:

Wir kommt man zu den Gesetzen der beschleunigten Bewegung mit konstanter Antriebskraft ?

Im Unterricht kann man beispielsweise mit einer „reibungsfrei“ gemachten Bewegung eine Meßreihe aufstellen und nach Proportionalitäten suchen.

Zunächst wird man banalerweise nachprüfen, daß Wegstrecke Δs und Fahrzeit Δt nicht proportional sein können. Weil das Fahrzeug immer schneller wird, nimmt in jeder folgenden Sekunde der zurückgelegte Weg zu ! Dennoch stellt man eine Meßreihe für s und t auf und sucht einen Zusammenhang. Ein Beispiel zeigt das Vorgehen:

Man kann auf diese Idee kommen, die Zeit t zu quadrieren, um damit die Wegzunahme durch die Zunahme der Geschwindigkeit zu kompensieren.

Jedenfalls klappt es ziemlich gut, die Konstanz des Quotienten $\frac{s}{t^2}$ nachzuweisen.

s	t	t^2	$\frac{s}{t^2}$
0,08 m	2 s	4 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,18 m	3 s	9 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,32 m	4 s	16 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,50 m	5 s	25 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$
0,72 m	6 s	35 s^2	0,02 $\frac{m}{s^2}$

Damit haben wir eine Proportionalität, und der Quotient (man nennt ihn die Proportionalitätskonstante) charakterisiert die Bewegung.

Warum man dann dem Quotienten gerade den Namen $\frac{1}{2}a$ gibt, kann man im Hinblick auf günstigere Ergebnisse erst mal abtun.

Nun hat man also experimentell ein Naturgesetz „entdeckt“ . Das Naturgesetz ist stets die Proportionalität. Die Gleichung macht erst der Mensch daraus, damit er etwas zum Rechnen hat !

Und das so gefundenen Rechengesetz lautet jetzt

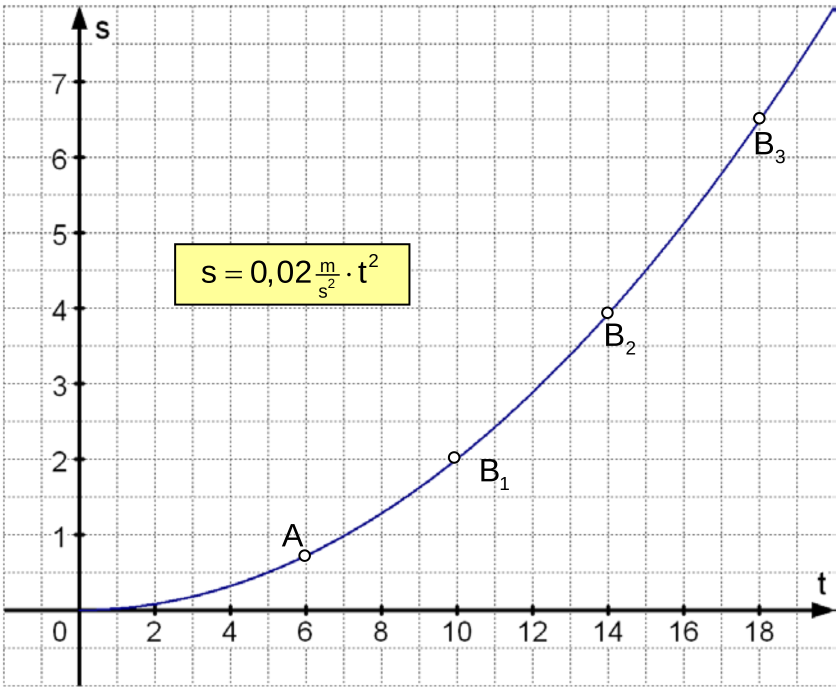
$$\boxed{s = \tfrac{1}{2}at^2}$$

Es ist das Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung und die Konstante a nennt man Beschleunigung. In unserem „Versuch“ hat sich

$$\frac{s}{t^2} = \frac{1}{2}a = 0{,}02\frac{m}{s^2} \Rightarrow a = 0{,}04\frac{m}{s^2}$$

ergeben.

Nun sollte man gleich ein Schaubild zur Hand haben, denn diese Gleichung stellt ja eine Parabel dar:



Auf der t-Achse wurde als Maßstab 1 cm $\hat{=}$ 2 s gewählt, damit die Parabel nicht zu flach wird.

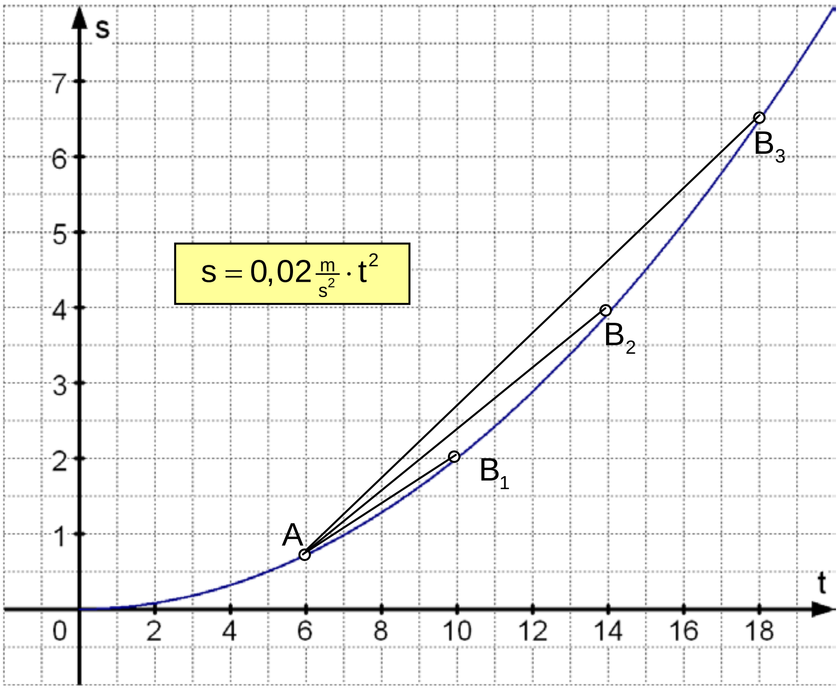
In das Diagramm sind vier „Zustandspunkte“ eingetragen:

$A(6s|0{,}72m)$, $B(10s|2m)$, $C(14s|3{,}92m)$ und $D(18s|6{,}48m)$,

Wir benötigen sie gleich für unser nächstes Problem:

Problem Nr. 3:

Wie kommt man nun zu einem vernünftigen Geschwindigkeitsbegriff ?
Dazu brauchen wir nochmals das Diagramm der Seite 2:



Wir berechnen jetzt mit der hier eigentlich ungültigen Formel

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

drei Geschwindigkeiten.

Und zwar verwenden wir dazu die vier vorhandenen Zustandspunkte A, B_1 , B_2 und B_3 .

Damit tun wir so, also ob sich der Körper gleichförmig von A zu B_1 , zu B_2 oder zu B_3 bewegt.
Man nennt die so erzeugte Geschwindigkeit die Durchschnittsgeschwindigkeit.

Mittels A und B_3 entsteht: $v_3 = \dfrac{6{,}48\,m - 0{,}72\,m}{18\,s - 6\,s} = \dfrac{5{,}76\,m}{12\,s} = 0{,}48\,\dfrac{m}{s}$

Mittels A und B_2 entsteht: $v_2 = \dfrac{3{,}92\,m - 0{,}72\,m}{14\,s - 6\,s} = \dfrac{3{,}20\,m}{8\,s} = 0{,}40\,\dfrac{m}{s}$

Mittels A und B_1 entsteht: $v_1 = \dfrac{2{,}00\,m - 0{,}72\,m}{10\,s - 6\,s} = \dfrac{1{,}28\,m}{4\,s} = 0{,}32\,\dfrac{m}{s}$

Im Diagramm sind Strecken (Sekanten) zwischen den Kurvenpunkten eingezeichnet. Wir wissen ja, die Steigung dieser Strecken geben die Geschwindigkeit der zugehörigen gleichförmigen Bewegung an. Wenn wir das Diagramm betrachten, erkennen wir, daß die Parabel in A flacher verläuft als jede dieser Sehnen, und daß sie in den Endpunkten jeweils steiler läuft als jede dieser Sehnen. Das heißt die tatsächliche Geschwindigkeit, wie sie auch immer ermittelt sein mag, ist in A kleiner als die Werte v_1 , v_2 und v_3 , und in den Endpunkt B_1 , B_2, B_3 größer als die drei berechneten Werte.

Man sieht aber schnell, daß die Abweichung immer kleiner wird, je näher wir den zweiten Zustandspunkt an A heranrücken.

Wer Erfahrung hat, der weiß, daß man nun B_1 gegen A rücken läßt und somit vor der Sekante zur Tangente kommt. Ich will als Beispiel einen sehr dicht bei A liegenden Punkt B* nehmen: $B(6{,}1\,s \mid 0{,}7442\,m)$. Dies ergibt einen Geschwindigkeitswert von

$$v^* = \frac{0{,}7442\,m - 0{,}72\,m}{6{,}1\,s - 6\,s} = \frac{0{,}0242\,m}{0{,}1\,s} = 0{,}242\,\frac{m}{s}$$

Wer die Theorie der Berechnung der Tangentensteigung mit Hilfe der Ableitungsfunktion kennt, weiß, daß wir nun einfach die Wegfunktion ableiten müssen und erhalten somit das was man dann die Momentangeschwindigkeit nennt:

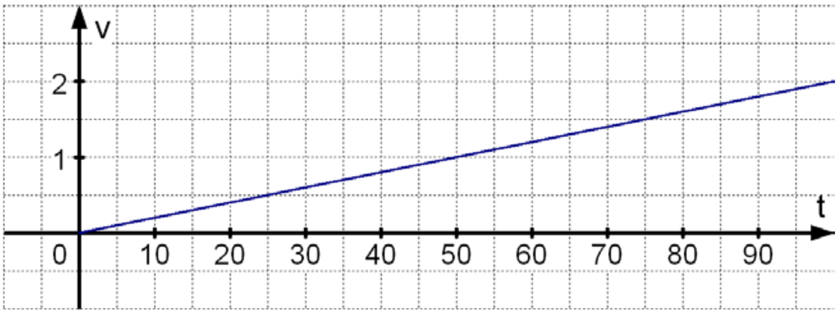
$$s(t) = \tfrac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; v(t) = s'(t) = at$$

Ist die abzuleitende Variable die Zeit, schreibt man nicht $s'(t)$ sondern $\dot{s}(t)$.
Der Punkt stellt somit das Zeichen für die Ableitung nach der Zeitvariablen dar.

Wem diese ganze Theorie zu schwer ist, der halte sich einfach am Ergebnis fest:
Die Momentangeschwindigkeit der gleichmäßig beschleunigten Bewegung wird berechnet durch

$$\boxed{v(t) = a \cdot t}$$

Dieses Schaubild gibt eine Gerade im $v-t-$Diagramm:



Man beachte, daß die Einheit auf der t-Achse noch kleiner gemacht worden ist. Denn bei der hier verwendeten kleinen Beschleunigung von $a = 0{,}04\,\frac{m}{s^2}$ nimmt die Geschwindigkeit nur ganz langsam, zu.

Dieses Diagramm ist nun ganz wichtig zum Verständnis des Begriffes Beschleunigung.

Im Vergleich mit der Geradengleichung $y = mx$ erkennt man daß in $v = at$ diese Beschleunigung a die Steigung darstellt. Und weil man diese Steigung an einer Geraden an beliebigen Abschnitten berechnen kann, gilt:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Beispiel: Bei einer beschleunigten Bewegung hat ein Körper nach t_1 = 4 s die Geschwindigkeit $v_1 = 12\,\frac{m}{s}$ und nach t_2 = 10 s die Geschwindigkeit $v_2 = 30\,\frac{m}{s}$.
Berechne die wirkende Beschleunigung:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{30\,\frac{m}{s} - 12\,\frac{m}{s}}{10\,s - 4\,s} = \frac{18\,\frac{m}{s}}{6\,s} = 3\,\frac{m}{s^2}$$

Erinnern Sie sich noch, wie man eine Gerade mit der Steigung 3 zeichnet ? Man geht um 1 nach rechts und um 3 nach oben, d.h. es gilt

Merke: Wird ein Körper durch $\mathbf{a = 3\,\frac{m}{s^2}}$ beschleunigt, dann nimmt seine Geschwindigkeit pro Sekunde um $\mathbf{3\,\frac{m}{s}}$ zu !

Das v – t – Diagramm gestattet auch noch die Berechnung des zurückgelegten Weges durch Berechnung des Flächeninhaltes zwischen der Geraden und der t-Achse.

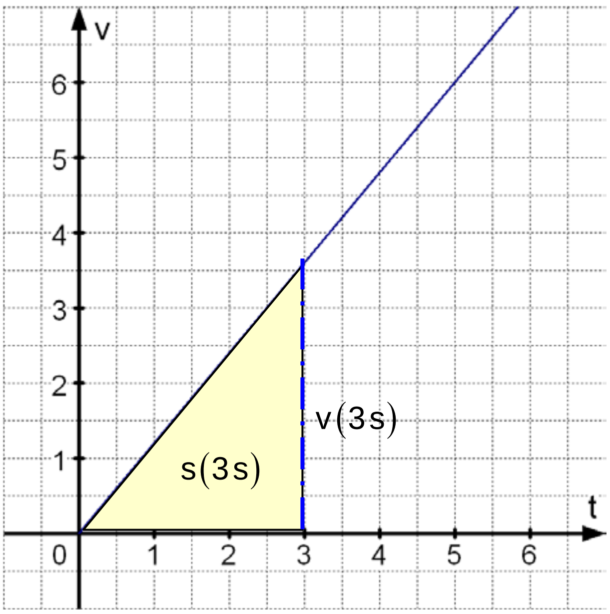
Beispiel.

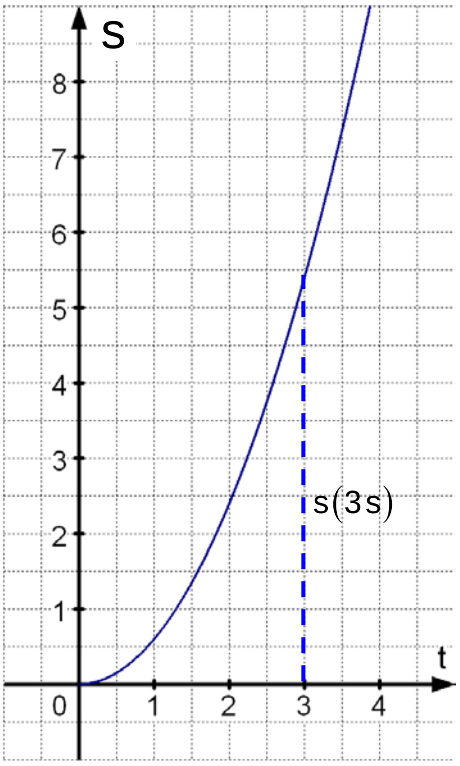
Gegeben sei eine Beschleunigung von $a = 1{,}2\,\frac{m}{s^2}$.

Dann lautet das Weg-Zeit-Gesetz: $s = \frac{1}{2}at^2 = 0{,}6\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$

und das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz: $v = a \cdot t = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot t$

Dies ergibt zwei Diagramme:





Beginnen wir im rechten Bild. Dort ist die **Weg-Zeit-Funktion** $s(t) = 0{,}6\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2$ als Parabel dargestellt. Zusätzlich ist der nach 3 s zurückgelegte Weg eingezeichnet: $s(3s) = 0{,}6\,\frac{m}{s^2} \cdot 9s^2 = 5{,}4\,m$.

Im linken Bild ist die **Geschwindigkeits-Zeit-Funktion** dargestellt: $v(t) = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot t$.
Zusätzlich ist die Geschwindigkeit nach 3 s eingetragen: $v(3s) = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot 3s = 3{,}6\,\frac{m}{s}$.
Die grüne Dreiecksfläche hat den „Inhalt“ $A = \frac{1}{2} \cdot 3s \cdot 3{,}6\,\frac{m}{s} = 5{,}4\,m$.

Und dies ist genau der nach 3 Sekunden zurückgelegte Weg !!!

Allgemein gilt nämlich für dieses Dreieck:

$$A = \frac{1}{2} \cdot t \cdot v(t) = \frac{1}{2} \cdot t \cdot at = \frac{1}{2}at^2 = s(t).$$

Es wird bald Aufgaben geben, bei denen dies wichtig ist !

2. Einfache Berechnungen

Wir haben nun eine Reihe von Formeln, die wir anwenden können:

WISSEN: Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt:

$$a = \text{konstant}$$

$$v = a \cdot t$$

$$s = \tfrac{1}{2} a \cdot t^2$$

Dabei sind s und v die aus der Ruhe heraus nach der Zeit t erreichten Werte.

Wie können nun Aufgaben aussehen?

BEISPIEL 1

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** beschleunigt und erreicht nach 8 Sekunden die Geschwindigkeit $11{,}2\,\frac{m}{s}$. Welchen Weg hat er dabei zurückgelegt?

Lösung:

Gegeben sind nun $t = 8\,s$ und $v = 11{,}2\,\frac{m}{s}$, also liefert und die Formel $a = \frac{v}{t}$ die wirkende Beschleunigung: $a = \frac{11{,}2\,\frac{m}{s}}{8\,s} = 1{,}4\,\frac{m}{s^2}$

Daher folgt $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0{,}7\,\frac{m}{s^2} \cdot 64\,s^2 = 44{,}8\,m$.

BEISPIEL 2

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** beschleunigt und hat nach 5 s die Strecke 50 m zurückgelegt. Welche Geschwindigkeit hat er dann erreicht?

Lösung:

Gegeben sind jetzt $t = 5\,s$ und $s = 50\,m$.

Die Formel $s = \frac{1}{2} a t^2$ liefert jetzt die Beschleunigung a:

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{100\,m}{25\,s^2} = 4\,\frac{m}{s^2}$$

Daraus folgt dann $v = a \cdot t = 4\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 20\,\frac{m}{s}$.

BEISPIEL 3

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** mit $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt und legt dabei die Strecke 30 m zurück. Welche Geschwindigkeit hat er erreicht ?

Lösung:

Gegeben sind also $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ und $s = 30$ m.

Aus $s = \frac{1}{2}a\cdot t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2s}{a} = \frac{60\,m}{2{,}4\,\frac{m}{s^2}} = 25\,s^2$ Daher ist $t = \sqrt{25\,s^2} = 5\,s$.

Nun folgt $\boxed{v = a\cdot t} = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}\cdot 5\,s = 12\,\frac{m}{s}$

ACHTUNG – Es geht schneller:

Wir haben in der Lösung aus der Gleichung $\boxed{s = \frac{1}{2}a\cdot t^2}$ die Zeit t berechnet und diese dann in die Formel $\boxed{v = a\cdot t}$ eingesetzt. Dies kann man auch zuerst machen und die Zahlen erst hinterher einsetzen. Auf diese Weise entsteht aus 2 Formeln eine neue, mit der man v aus s berechnen kann.

Der allerdings kürzere Weg zur Herstellung dieser Formel läuft so:

Es gilt $s = \frac{1}{2}a\cdot t^2$ (1)

und $v = a\cdot t$ (2)

Aus (2) folgt $t = \frac{v}{a}$

Eingesetzt in (1): $s = \frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\cancel{a}\cdot\frac{v^2}{a^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{a}$ $\quad|\cdot 2a$

Aufgelöst nach v: $2as = v^2$

Oder umgestellt:. $\boxed{v = \sqrt{2as}}$

Diese Gleichung gestattet die Berechnung der Geschwindigkeit, die ein Körper erreicht hat, wenn er <u>aus der Ruhe heraus</u> entlang einer Strecke s beschleunigt worden ist.

Man sollte sie sich diese Formel merken, sie hilft oft schnell!

Angewandt auf unser Beispiel 3 erhält man das Ergebnis in einer Zeile!

$$v = \sqrt{2\cdot 2{,}4\,\frac{m}{s^2}\cdot 30\,m} = \sqrt{144\,\frac{m^2}{s^2}} = 12\,\frac{m}{s}$$

BEISPIEL 4

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** mit $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt und erreicht dabei die Geschwindigkeit $12\,\frac{m}{s}$.
Welche Wegstrecke hat er zurückgelegt?

Lösung:

Gegeben sind also $a = 2{,}4\,\frac{m}{s^2}$ und $v = 12\,\frac{m}{s}$. Und gesucht ist der Weg s.

Wer jetzt gut aufgepaßt hat, muß erkannt haben, daß wir eine Formel benötigen, welche die drei Größen a, v und s enthält, also diese (siehe Seite 9):

$$\boxed{v = \sqrt{2as}}$$

Quadrieren und umstellen nach s:

$$v^2 = 2as \;\Rightarrow\; s = \frac{v^2}{2a} = \frac{144\,\frac{m^2}{s^2}}{4{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 30\,m$$

Bemerkung:

Es gibt Lehrer, die zunächst ohne diese Formel auskommen wollen, weil sie den Umgang mit den beiden anderen einüben lassen wollen. Dann geht man so vor:

Aus $v = a \cdot t$ folgt $t = \frac{v}{a} = \frac{12\,\frac{m}{s}}{2{,}4\,\frac{m}{s^2}} = 5\,s$

Damit folgt: $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 1{,}2\,\frac{m}{s^2} \cdot 25\,s^2 = 30\,m.$

Dies ist etwas umständlicher, geht aber auch. Allerdings haben wir einen wichtigen Nebeneffekt, wir haben zugleich die Fahrzeit 5 s ermittelt.
Ist diese in der Aufgabe direkt gefragt, dann sollte man nur diesen Weg einschlagen.

BEISPIEL 5

Ein Körper wird **aus der Ruhe heraus** beschleunigt und erreicht nach 15 m die Geschwindigkeit $6\,\frac{m}{s}$. Wir lange wurde beschleunigt?

Lösung:

Gegeben sind $s = 15\,m$ und $v = 6\,\frac{m}{s}$. Wir haben schon wieder diese Konstellation und berechnen aus $v = \sqrt{2as}$ die Beschleunigung a:

$$v^2 = 2as \;\Rightarrow\; a = \frac{v^2}{2s} = \frac{36\,\frac{m^2}{s^2}}{30\,m} = 1{,}2\,\frac{m}{s^2}.$$

Aus $v = a \cdot t$ folgt $t = \frac{v}{a} = \frac{6\,\frac{m}{s}}{1{,}2\,\frac{m}{s^2}} = 5\,s.$

3. Etwas schwierigere Beispiele

BEISPIEL 6

Ein Körper wird aus der Ruhe heraus 5 Sekunden lang mit $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ beschleunigt. Dann fährt er gleichförmig weiter. Wie weit ist er nach 2 Minuten gefahren und welche Endgeschwindigkeit besitzt er?

Lösung:

Da für eine gleichförmige Bewegung (konstante Geschwindigkeit) andere Gesetze gelten als für eine beschleunigte Bewegung (Geschwindigkeit ändert sich), muss man Startphase und Beschleunigungsphase getrennt berechnen!

Startphase: (Gleichmäßig beschleunigte Bewegung).

Gegeben sind $a = 0{,}8\,\frac{m}{s^2}$ und $t = 5\,s$.

Daraus folgt $v = a \cdot t = 0{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 4\,\frac{m}{s}$

und $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0{,}4\,\frac{m}{s^2} \cdot 25\,s^2 = 10\,m$

(Achtung: t ist die aus der Ruhe heraus gefahrene Zeit)

Gleichförmige Phase:

Die Geschwindigkeit $v = 4\,\frac{m}{s}$ bleibt konstant bis zum Ende.
Zurückgelegter Weg in der Restzeit $\Delta t = 2\,min - 5\,s = 115\,s$:

Aus $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ folgt $\Delta s = v \cdot \Delta t = 4\,\frac{m}{s} \cdot 115\,s = 460\,m$

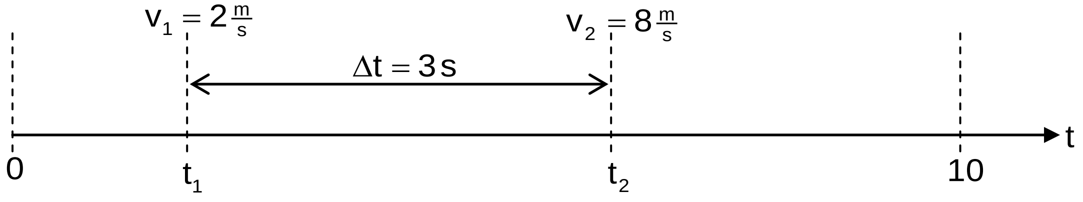
(Achtung: t ist nicht mehr die aus der Ruhe heraus gefahrene Zeit, sondern ist jetzt eine Zeitspanne zwischen zwei Zeitpunkten (t-Werten), weshalb man statt t jetzt Δt verwenden sollte.)

BEISPIEL 7

Ein Fahrzeug wird aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigt.
Dabei braucht es zur Erhöhung seiner Geschwindigkeit von $v_1 = 2\,\frac{m}{s}$ auf $v_2 = 8\,\frac{m}{s}$ genau 3 Sekunden.

Berechne die wirkende Beschleunigung ,die nach 10 Sekunden erreichte Geschwindigkeit sowie den bis dahin zurückgelegten Weg.

Überlegung:



Eine solche Skizze lohnt sich immer, da sie die Sachverhalte klarer macht.

Nun muß man sich als erstes darüber klar werden, daß es um die Größen v und t geht, also ist die Formel $v = a \cdot t$ gefragt.

Wir müssen sie auf zwei Ereignisse anwenden:

Zur Zeit t_1 ist $v_1 = 2\frac{m}{s}$ d.h. es gilt $v_1 = a \cdot t_1$ (1)

Zur Zeit t_2 ist $v_2 = 8\frac{m}{s}$ d.h. es gilt $v_2 = a \cdot t_2$. (2)

Nun müssen wir unbedingt unsere Kenntnis der 3 Sekunden ausnützen, d.h. wir müssen auf die Idee kommen, aus $\Delta t = t_2 - t_1$ die Gleichung $t_2 = t_1 + \Delta t$ zu bilden. (Achtung: t_1 und t_2 sind Zeitpunkte, Δt ist die Zeitspanne dazwischen!)

Eingesetzt in (2): $$v_2 = a \cdot (t_1 + \Delta t) = \underbrace{a \cdot t_1}_{v_1} + a \cdot \Delta t$$

Also gilt jetzt: $$v_2 = v_1 + a \cdot \Delta t \Rightarrow a \cdot \Delta t = v_2 - v_1 \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ja, und man hätte sich die ganze Arbeit sparen können, wenn man sich diese Formel von Seite 4 gemerkt hätte. Dort war besprochen worden, daß die Beschleunigung a wegen v = at die Steigung im v – t – Diagramm ist. Und die Steigung kann man aus zwei beliebigen Meßpunkten berechnen, eben durch

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}.$$

Nach diesen nicht unwichtigen Überlegungen folgt die eigentliche Lösung:

Gegeben sind die zwei Zustandspunkte des v – t – Diagramms:

$$P_1\left(t_1 | 2\tfrac{m}{s}\right) \text{ und } P_2\left(t_2 | 8\tfrac{m}{s}\right)$$

wobei zusätzlich $\Delta t = 3\,s$ gegeben ist.

Es folgt: $$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{6\frac{m}{s}}{3\,s} = 2\frac{m}{s^2}.$$

Nach t_3 = 10 s ist dann $$v(10s) = 2\frac{m}{s^2} \cdot 10s = 20\frac{m}{s}$$

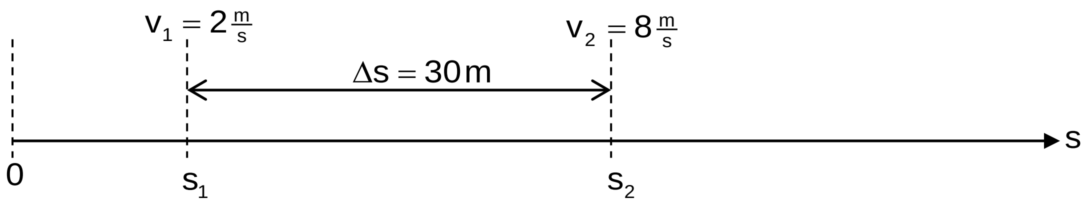
und $$s(10s) = \tfrac{1}{2} a \cdot t_3^{\,2} = 1\frac{m}{s^2} \cdot 100s^2 = 100\,m.$$

BEISPIEL 8

Ein Fahrzeug wird aus der Ruhe heraus gleichmäßig beschleunigt.
Dabei braucht es zur Erhöhung seiner Geschwindigkeit von $v_1 = 2\,\frac{m}{s}$ auf $v_2 = 8\,\frac{m}{s}$ genau 30 m Fahrstrecke.

Berechne die wirkende Beschleunigung

Überlegung:



Der Unterschied zu Beispiel 7 ist erkennbar: Jetzt ist die Wegstrecke gegeben, zuvor war es die Fahrzeit. Daher nützt jetzt die Formel $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ nichts mehr !

Aber wir verwenden die Formel $v = \sqrt{2as}$ bzw. $v^2 = 2as$:

Es gilt bei s_1 : $v_1^{\,2} = 2as_1$ und bei s_2 : $v_2^{\,2} = 2as_2$
Nun subtrahiert man beide Gleichungen:

$$v_2^{\,2} - v_1^{\,2} = 2as_2 - 2as_1 = 2a\left(s_2 - s_1\right) = 2a \cdot \Delta s$$

Daraus folgt
$$a = \frac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2 \cdot \Delta s} = \frac{64\,\frac{m^2}{s^2} - 4\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 30\,m} = \frac{60\,\frac{m^2}{s^2}}{60\,m} = 1\frac{m}{s^2}$$

4. Der freie Fall

Wenn wir uns in nicht allzu große Höhe begeben, können wir die Gravitationskraft, also die Gewichtskraft unserer Körper als konstant ansehen. Denken wir uns dann noch den Luftwiderstand weg, dann fallen Körper unter dem Einfluß einer konstanten Kraft gleichmäßig beschleunigt.

Die Beschleunigung kann man experimentell zu etwa $9{,}81\frac{m}{s^2}$ bestimmen. Man verwendet dafür das Symbol g:

WISSEN: Fallen Körper im erdnahen Raum ohne Luftwiderstand, dann führen sie eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Fallbeschleunigung $a = g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ aus.
Oftmals wird $g \approx 10\frac{m}{s^2}$ aufgerundet.

Für das Fallen aus der Ruhe heraus gelten daher folgende Gesetze:

$$v = g \cdot t \quad \text{bzw.} \quad g = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (1)$$

$$h = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

Dabei ist h die Fallstrecke aus der Ruhe heraus und t die zugehörige Fallzeit sowie v die dann erreichte Geschwindigkeit.

Im Grunde ist also der freie Fall nichts Neues, sondern nur eine spezielle gleichmäßig beschleunigte Bewegung, die sogar den Vorteil hat, daß man die Beschleunigung kennt. Daher sollen jetzt keine weiteren Beispiele folgen sondern einige Aufgaben zum Üben.

AUFGABEN zum freien Fall

Es ist gestattet, mit $g \approx 10\,\frac{m}{s^2}$ zu rechnen.

(1) Ein Körper fällt 12 Sekunden lang. Wie tief ist er gefallen und welche Geschwindigkeit hat er erreicht ?

(2) Ein Körper fällt 20 m tief. Wie lange braucht er dazu und welche Geschwindigkeit hat er am Ende der Fallstrecke?

(3) Ein Körper fällt frei. Nach welcher Zeit und welcher zurückgelegten Fallhöhe erreicht er die Geschwindigkeit $108\,\frac{km}{h}$?

(4) Ein Körper fällt 6 Sekunden lang frei. Wie lang sind die Wegstrecken in der 1. Sekunde, in der 2. Sekunde usw.? Gib auch die nach 1 s, 2 s usw. erreichten Geschwindigkeiten an.

(5) Zwei Körper werden von einem Hochhaus aus fallen gelassen. Der zweite Körper beginnt seinen Fall genau 1 Sekunde nach dem ersten. In welchem zeitlichen Abstand treffen sie auf dem Boden in 125 m Tiefe auf ?
Wie groß ist 3 Sekunden nach dem Loslassen des 1. Körpers der Höhenunterschied und der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Körper?

Und nun schwere Aufgaben:

(6) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2 in der Zeit 2,4 s. Diese Marken haben einen Abstand von 90 m. Berechne h_1 und h_2 .

(7) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2 , die 1,8 m auseinander liegen. Der Geschwindigkeitsunterschied beträgt $2\,\frac{m}{s}$ Berechne h_1 und h_2.

(8) Ein Körper erzielt auf einer Fallstrecke eine Geschwindigkeitszunahme von $5\,\frac{m}{s}$. Was läßt sich daraus für die benötigte Zeitspanne folgern?

Lösungen

(1) Ein Körper fällt 12 Sekunden lang. Wie tief ist er gefallen und welche Geschwindigkeit hat er erreicht?

Gegeben ist also $t = 12\,s$.

Aus $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ folgt $h = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot 144\,s^2 = 720\,m$

und aus $v = g \cdot t$ folgt $v = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 12\,s = 120\,\frac{m}{s}$.

Wie schnell dies ist, erkennt man vielleicht erst nach der Umrechnung in die Einheit $\frac{km}{h}$:

Es ist $1\frac{m}{s} = 3{,}6\,\frac{km}{h}$ also folgt $v = 120\,\frac{m}{s} = 120 \cdot 3{,}6\,\frac{km}{h} = 432\,\frac{km}{h}$.

Diese Aufgabe ist nicht mehr realistisch. Bei einer so hohen Geschwindigkeit ist der Luftwiderstand so groß, dass der Fall schon nahezu auf Gleichförmigkeit abgebremst wird!

---

(2) Ein Körper fällt 20 m tief. Wie lange braucht er dazu und welche Geschwindigkeit hat er am Ende der Fallstrecke?

Gegeben ist nun $h = 20\,m$.

Aus $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ folgt $t^2 = \dfrac{2h}{g} = \dfrac{40\,m}{10\,\frac{m}{s^2}} = 4\,s^2 \;\Rightarrow\; t = 2\,s$.

Aus $v = g \cdot t$ folgt dann $v = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 2\,s = 20\,\frac{m}{s}$

---

(3) Ein Körper fällt frei. Nach welcher Zeit und welcher zurückgelegten Fallhöhe erreicht er die Geschwindigkeit $108\,\frac{km}{h}$?

Gegeben ist jetzt $v = 108\,\frac{km}{h} = \dfrac{108}{3{,}6}\,\frac{m}{s} = 30\,\frac{m}{s}$

Aus $v = g \cdot t$ folgt $t = \dfrac{v}{g} = \dfrac{30\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = 3\,s$.

Daraus folgt $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 5\,\frac{m}{s^2} \cdot 9s^2 = 45\,m$.

Hinweis: *Wenn v gegeben ist und nur die Fallstrecke gefragt ist, kann man durch Verwendung der Formel* $v = \sqrt{2gh}$ *bzw.* $h = \dfrac{v^2}{2g}$ *sofort auf*

$h = \dfrac{900\,\frac{m^2}{s^2}}{20\,\frac{m}{s^2}} = 45\,m$ *kommen.*

(4) Ein Körper fällt 6 Sekunden lang frei. Wie lang sind die Wegstrecken in der 1. Sekunde, in der 2. Sekunde usw.? Gib auch die nach 1 s, 2 s usw. erreichten Geschwindigkeiten an.

Berechnung der Folge der Wegstrecken mit einer Tabelle mittels $s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 5 \frac{m}{s^2} \cdot t^2$

und der Geschwindigkeiten mittels
$v = g \cdot t = 10 \frac{m}{s^2} \cdot t$

Man erkennt, daß die in einer Sekunde zurückgelegte Fallstrecke pro Sekunde um 10 m wächst.

Dagegen nimm die Geschwindigkeit pro Sekunde stets um denselben Betrag zu, um 10 $\frac{m}{s}$.

t	s	Δs	v	Δv
0	0	-	0	-
1 s	5 m	5 m	10 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
2 s	20 m	15 m	20 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
3 s	45 m	25 m	30 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
4 s	80 m	35 m	40 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
5 s	125 m	45 m	50 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$
6 s	180 m	55 m	60 $\frac{m}{s}$	10 $\frac{m}{s}$

---

(5) Zwei Körper werden von einem Hochhaus aus fallen gelassen. Der zweite Körper beginnt seinen Fall genau 1 Sekunde nach dem ersten. In welchem zeitlichen Abstand treffen sie auf dem Boden in 125 m Tiefe auf?

Wie groß ist 3 Sekunden nach dem Loslassen des 1. Körpers der Höhenunterschied und der Geschwindigkeitsunterschied der beiden Körper?

Die erste Frage ist ziemlich banal und bedarf eigentlich keiner Rechnung.

Berechnen wir doch die Fallzeit für diese Höhe:

$$h = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{250\,m}{10\,\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{25\,s^2} = 5\,s$$

Ja, und nun muß man nur nachdenken: Jeder der beiden Körper fällt 5 Sekunden lang, dann schlägt er auf. Ja, und wenn der zweite 1 Sekunde nach dem ersten zu fallen beginnt, dann trifft er auch 1 Sekunde nach diesem unten auf !!!

Wie ist dies nun 3 Sekunden nach dem Fallbeginn des ersten Körpers ?
Dann ist der 2. genau 2 Sekunden unterwegs.
Wir berechnen die Fallstrecken und ihre Differenz:

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \tfrac{1}{2} g t_1^2 - \tfrac{1}{2} g t_2^2 = \tfrac{1}{2} g \cdot \left(t_1^2 - t_2^2\right) = 5 \tfrac{m}{s^2} \cdot \left(9\,s^2 - 4\,s^2\right) = 25\,m$$

Und dann der Geschwindigkeitsunterschied:

$$\Delta v = v_1 - v_2 = g \cdot t_1 - g \cdot t_2 = g \cdot \left(t_1 - t_2\right) = g \cdot \Delta t = 10 \tfrac{m}{s^2} \cdot 1 s = 10 \tfrac{m}{s}$$

Da haben wir sie wieder, diese Formel $g = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ also $\Delta v = g \cdot \Delta t$, mit der vieles einfach schneller geht.

(6) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2 in der Zeit 2,4 s. Diese haben einen Abstand von 90 m. Berechne h_1 und h_2 .

Da es hier um die Größen h und t geht, verwendet man die Gleichung $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$.
Wir müssen mit zwei Gleichungen arbeiten:

Für h_1 gilt: $h_1 = \frac{1}{2} g \cdot t_1^{\,2}$ (1)

Für h_2 gilt: $h_2 = \frac{1}{2} g \cdot t_2^{\,2}$ (2)

Da wir den Höhenunterschied $\Delta h = h_2 - h_1 = 90\,m$ gegeben haben, müssen wir diese Gleichungen subtrahieren: Aus (2) – (1) folgt:

$$h_2 - h_1 = \tfrac{1}{2} g \cdot t_2^{\,2} - \tfrac{1}{2} g \cdot t_1^{\,2}$$

d.h. $\Delta h = \frac{1}{2} g \cdot \left(t_2^{\,2} - t_1^{\,2}\right)$ (3)

Nun kennen wir auch noch $\Delta t = t_2 - t_1 = 2{,}4\,s$, also folgt $t_2 = t_1 + 2{,}4\,s$

Und daraus berechnet man $t_2^{\,2} = \left(t_1 + 2{,}4\,s\right)^2 = t_1^{\,2} + 4{,}8\,s \cdot t_1 + 5{,}76\,s^2$.

Aus (3) erhält man durch Einsetzen:

$$90\,m = 5\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(t_1^{\,2} + 4{,}8\,s \cdot t_1 + 5{,}76\,s^2 - t_1^{\,2}\right) \quad \Big| : 5\tfrac{m}{s^2}$$

d.h.

$$18\,s^2 = 4{,}8\,s \cdot t_1 + 5{,}76\,s^2$$

$$4{,}8\,s \cdot t_1 = 18\,s^2 - 5{,}76\,s^2$$

$$4{,}8\,s \cdot t_1 = 12{,}24\,s^2$$

$$t_1 = \frac{12{,}24}{4{,}8}\,s = 2{,}55\,s$$

Und damit $t_2 = t_1 + 2{,}4\,s = 4{,}95\,s$.

Nun lassen sich die gesuchten Höhenmarken berechnen:

$$h_1 = \tfrac{1}{2} g \cdot t_1^{\,2} = 5\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(2{,}55\,s\right)^2 = 32{,}5125\,m$$

$$h_2 = \tfrac{1}{2} g \cdot t_2^{\,2} = 5\tfrac{m}{s^2} \cdot \left(4{,}95\,s\right)^2 = 122{,}5125\,m$$

Wie man schnell nachrechnen kann, beträgt der Höhenunterschied tatsächlich 90 m.

Dies war eine schwere Aufgabe. Es lohnt sich, die Methode genau zu studieren und sich einzuprägen.

(7) Ein Körper passiert bei Fallen die Marken h_1 und h_2, die 1,8 m auseinander liegen. Der Geschwindigkeitsunterschied beträgt $2\frac{m}{s}$ Berechne h_1 und h_2.

Da es um die Größen v und h geht, verwenden wir die Gleichung $v=\sqrt{2gh}$ bzw. $h=\frac{v^2}{2g}$.

Wir müssen mit zwei Gleichungen arbeiten:

Für h_1 gilt: $$h_1=\frac{v_1^2}{2g} \qquad (1)$$

Für h_2 gilt: $$h_2=\frac{v_2^2}{2g} \qquad (2)$$

Da wir den Höhenunterschied $\Delta h=h_2-h_1=1{,}8\,m$ gegeben haben, müssen wir diese Gleichungen subtrahieren: Aus (2) – (1) folgt:

$$h_2-h_1=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}$$

d.h. $$\Delta h=\frac{1}{2g}\cdot\left(v_2^2-v_1^2\right) \qquad (3)$$

Nun wissen wir noch, daß $\Delta v=v_2-v_1=2\frac{m}{s}$ ist, also ist $v_2=v_1+2\frac{m}{s}$.

Und daraus berechnet man $v_2^2=\left(v_1+2\frac{m}{s}\right)^2=v_1^2+4\frac{m}{s}\cdot v_1+4\frac{m^2}{s^2}$.

Aus (3) erhält man durch Einsetzen:

$$1{,}8\,m=\frac{1}{20\frac{m}{s^2}}\cdot\left(v_1^2+4\frac{m}{s}\cdot v_1+4\frac{m^2}{s^2}-v_1^2\right) \quad \Big|\cdot 20\frac{m}{s^2}$$

$$36\frac{m^2}{s^2}=4\frac{m}{s}\cdot v_1+4\frac{m^2}{s^2}$$

$$4\frac{m}{s}\cdot v_1=32\frac{m^2}{s^2}$$

$$v_1=8\frac{m}{s}$$

Daraus folgt $$v_2=v_1+2\frac{m}{s}=10\frac{m}{s}.$$

Nun verwenden wir $$h_1=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{64\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}}=3{,}2\,m$$

Und $$h_2=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{100\frac{m^2}{s^2}}{20\frac{m}{s^2}}=5\,m.$$

Und man kann den gegebenen Höhenunterschied von 1,8 bestätigen.

(8) Ein Körper erzielt auf einer Fallstrecke eine Geschwindigkeitszunahme von $5\,\frac{m}{s}$. Was läßt sich daraus für die benötigte Zeitspanne folgern?

Es geht um v und t , also verwenden wir die Gleichung $v = g \cdot t$.
Wir müssen mit zwei Gleichungen arbeiten:

Für t_1 gilt: $v_1 = g \cdot t_1$ (1)
Für t_2 gilt: $v_2 = g \cdot t_2$ (2)

Zur Berechnung der Geschwindigkeitszunahme subtrahieren wir (2) – (1) :

$$v_2 - v_1 = g \cdot t_2 - g \cdot t_1$$
$$v_2 - v_1 = g \cdot (t_2 - t_1)$$
$$\Delta v = g \cdot \Delta t$$
$$\Delta v = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \Delta t$$

Man erkennt, daß die Geschwindigkeitszunahme also zahlenmäßig der zehnfache Wert ist. Also braucht der fallende Körper nur 0,5 Sekunden für diese Zunahme.

Überraschung: Erinnern Sie sich noch an die Gleichung

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad g = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ?$$

Die Beschleunigung ist die Steigung im v – t – Diagramm !!!

Wer diese Formel kennt, kann sich die ganze Herleitung oben sparen und hat sofort

$$\Delta v = g \cdot \Delta t \quad \text{bzw.} \quad \Delta v = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \Delta t \;\; !$$