Teil 1

Gleichförmige Bewegungen

Datei Nr. 91111

Friedrich W. Buckel

Geändert: 18. Januar 2013

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1	**Grundlagen der gleichförmigen Bewegung**	3
2	**Gleichförmige Bewegung mit Startposition**	6
3	**Achtung Gegenverkehr!**	8
4	**Bewegungsdiagramme**	13

Hinweise

Es wurde viel Mühe darauf verwendet, einige Beispiele mit sich begegnenden bzw. einholenden Fahrzeugen darzustellen.
Dies geschah einerseits mit Bewegungsgleichungen
als auch graphisch in Weg-Zeit-Diagrammen.

Es gibt seit 2011 einen Text 12185 „Bewegungsalgebra“ mit vielen Aufgaben zu solchen „gleichzeitigen Bewegungen“-

1. Grundlagen der gleichförmigen Bewegung

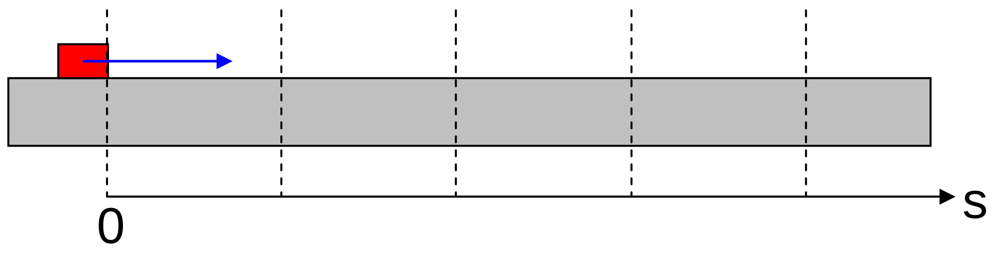
Definition:

Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn der bewegte Körper in gleichen Zeitspannen gleich lange Strecken zurücklegt.

Im Unterricht führt man dazu in aller Regel Experimente mit einer Fahrbahn aus. Darauf befindet sich ein Wagen, der diese gleichförmige Bewegung machen soll. Dies geht nun experimentell gar nicht so einfach.

Zum einen muß man ihn aus der Ruhe heraus erst einmal kurzzeitig beschleunigen, damit er überhaupt in Bewegung kommt. Zum andern muß man die Reibung ausschalten. Dazu gibt man der Fahrbahn ein so minimales Gefälle, daß die daraus entstehende Beschleunigungskraft sich gerade mit der Reibungskraft ausgleicht. Mit den heutigen Luftkissenfahrbahnen ist diese Reibung nur noch ganz minimal vorhanden, hat man eine Fahrbahn mit einem kleinen Wagen mit Rädern, dann muß man schon genauer justieren um diese Reibung zu kompensieren.

Die Beschleunigungskraft kann man entweder mit einer kleinen Feder am Startpunkt erzeugen, oder mit einem zu Boden ziehenden Körper der über eine Schnur und eine Umlenkrolle mit dem Fahrzeug verbunden ist.



Diese Skizze zeigt, wie man verschiedene Fahrstrecken abgreift und die zugehörige Fahrzeit stoppt, vorausgesetzt, ab $s = 0$ ist die Bewegung bereits gleichförmig, d.h. die am Start nötige Antriebskraft ist nicht mehr wirksam.

Dann füllt man eine Tabelle aus und trägt Strecken und Fahrzeiten ein, etwa so:

Weg s	Zeit t	$\frac{s}{t}$
0,2 m	0,8 s	0,25 $\frac{m}{s}$
0,4 m	1,6 s	0,25 $\frac{m}{s}$
0,6 m	2,4 s	0,25 $\frac{m}{s}$
0,8 m	3,2 s	0,25 $\frac{m}{s}$
1,0 m	4,0 s	0,25 $\frac{m}{s}$

Die Auswertung wurde in der dritten Spalte vorgenommen. Dort berechnet man den Quotienten aus s und t. In unserem ideal gemachten Beispiel ist dieser immer konstant.

Ist der Quotient zweier Größen konstant, dann nennt man diese Größen proportional.

Hier sind also s und t proportional, man schreibt dies so: $s \sim t$.
Der konstante Quotient ist dann charakteristisch für diese Bewegung man nennt ihn die Geschwindigkeit v.

$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$

Wenn man sich die Definition genau durchliest, dann darf man aber auch Strecken messen, die nicht am Startpunkt beginnen, etwa vom 2. bis zum 4. Strich unserer Abbildung. Die Auswertung sieht dann so aus:

Strecke von Marke s_1 = 0,2 m bis s_3 = 0,6 m, d.h. Streckenlänge

$$\Delta s = s_3 - s_1 = 0{,}4\,m.$$

Zugehörige Zeitspanne: $\Delta t = 1{,}6\,s$

Auch hier wird der Quotient berechnet: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}4\,m}{1{,}6\,s} = 0{,}25\frac{m}{s}$

Merke:

s bezeichnet die **Position**, an dem sich ein Körper befindet.
t bezeichnet den Zeitpunkt, an dem er sich in s befindet.
Δs bezeichnet eine zurückgelegte Wegstrecke
Δt bezeichnet eine Zeitspanne
Es gilt daher z.B. $\Delta s = s_2 - s_1$ und $\Delta t = t_2 - t_1$.

Und für eine gleichförmige Bewegung muß gelten:

$$\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = \mathit{konstant}} \quad (1)$$

Nur wenn eine Strecke bei s_1 = 0 beginnt und damit die Zeitspanne bei t_1 = 0, dann ist $\Delta s = s$ und $\Delta t = t$, und dann kann man auch schreiben

$$\frac{s}{t} = \mathit{konstant}\,. \quad (2)$$

Ein Beispiel für eine gleichförmige Bewegung, wo (1) gilt, aber nicht (2):

Ein Fahrzeug wird aus der Ruhe heraus 5 Sekunden lang beschleunigt und erreicht dann die Geschwindigkeit $v = 3\frac{m}{s}$, die geschieht auf einer 8 m langen Strecke.
Ab dann fährt es gleichförmig weiter, behält also seine Geschwindigkeit bei.
Dann legt es pro Sekunde immer 3 m zurück, also in jeder folgenden Zeitspanne von 5 Sekunden Dauer immer 15 m. Dies ergibt diese Tabelle:

t	S	$\frac{s}{t}$
0	0	---
5 s	8 m	1,6 $\frac{m}{s}$
10 s	23 m	2,3 $\frac{m}{s}$
15 s	38 m	2,53 $\frac{m}{s}$
usw.		

Durch die Vorschaltung der Beschleunigungsphase gilt nicht mehr die Proportionalität zwischen s und t. Aber ab der. 5. Sekunde ist bei $\Delta t = 5\,s$ stets $\Delta s = 15\,m$, es gilt hier die Proportionalität zwischen Δs und Δt. Und wir erhalten für die gleichförmige Bewegung ab der 5. Sekunde

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 5\frac{m}{s}\,.$$

(Siehe Seite 5)

Damit kann man nun einige Aufgaben rechnen:

(1) Ein Fahrzeug fährt gleichmäßig mit $v = 15\,\frac{m}{s}$.

Wir weit fährt es in 2 Minuten?

Aus $v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \cdot t = 15\,\frac{m}{s} \cdot 120\,s = 1800\,m = 1{,}8\,km$

Wie lange braucht dieses Fahrzeug für 3 km?

Aus $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{3000\,m}{15\,\frac{m}{s}} = 200\,s$

Man achte auf die Rechnung mit den Einheiten: $\frac{m}{\frac{m}{s}} = m \cdot \frac{s}{m} = s$

(2) Ein Fahrzeug benötigt für 350 m 4,2 s. Wie lange benötigt es für 500 m? Wir setzen gleichförmige Bewegung voraus.

Wir berechnen zuerst die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{350\,m}{4{,}2\,s} = \frac{3500\,m}{42\,s} = \frac{500}{6}\frac{m}{s} \approx 83{,}3\,\frac{m}{s}$$

Und nun die neue Fahrzeit: $v = \frac{s}{t} \Rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{500\,m}{\frac{500}{6}\,\frac{m}{s}} = 500 \cdot \frac{6}{500}\,s = 6\,s$.

(3) Ein Fahrzeug fährt gleichförmig mit $v = 108\,\frac{km}{h}$.
Wie weit fährt es in 15 Sekunden?

Nun müssen wir zuerst lernen, wie man die Einheiten umrechnet:

WISSEN: Umrechnung von $\frac{km}{h}$ in $\frac{m}{s}$ und umgekehrt:

$$\mathbf{1\,\frac{km}{h} = \frac{1\,km}{1\,h} = \frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{m}{s}}$$

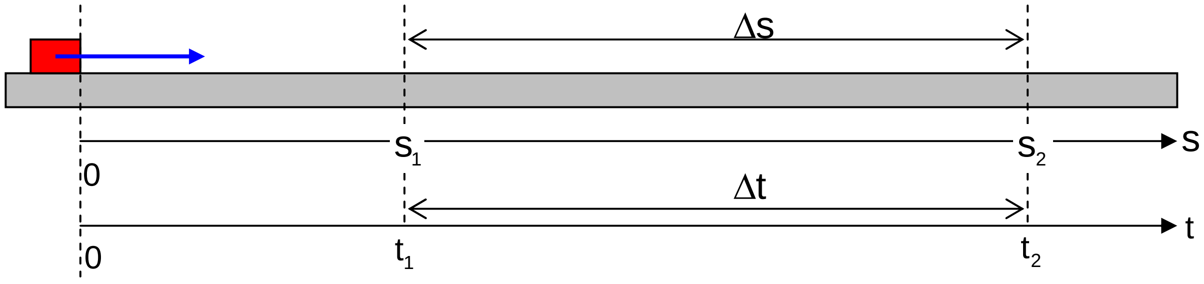
bzw. $\mathbf{1\,\frac{m}{s} = 3{,}6\,\frac{km}{h}}$

Also folgt: $v = 108\,\frac{km}{h} = \frac{108}{3{,}6}\,\frac{m}{s} = 30\,\frac{m}{s}$.

Daher folgt: $s = v \cdot t = 30\,\frac{m}{s} \cdot 15\,s = 450\,m$.

2. Gleichförmige Bewegung mit Startposition

Im Abschnitt 1 haben wir den Weg immer ab einer bestimmten Stelle 0 aus gemessen. Nun aber stellen wir uns eine Wegstrecke vor, auf der zuerst beschleunigt wird, dann erst fährt er gleichförmig weiter:



Das Fahrzeug sei bei s = 0 in Ruhe und wird dann beschleunigt. Bei $s = s_1$ habe es die Geschwindigkeit v erreicht und fährt ab da gleichförmig weiter. Nach welcher Zeit erreicht es die Marke s_2?

Beispiel 1

Bei $s_1 = 0{,}5\ \text{m}$ sei $v = 0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und es gelte $s_2 = 2{,}5\ \text{m}$.

Lösung:

Wir berechnen die Wegstrecke zwischen s_1 und s_2 durch Subtraktion und schreibt dies so: $\Delta s = s_2 - s_1 = 2{,}5\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m} = 2\ \text{m}$

Nun können wir wie in Abschnitt 1 die Formel für die gleichmäßige Bewegung verwenden, aber bitte jetzt in dieser Form:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{2\ \text{m}}{0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2{,}5\ \text{s}$$

Man sieht, daß man nicht einfach s schreiben darf, denn s gibt nur die ***momentane Position*** des Fahrzeugs an, genauso wie t den ***Zeitpunkt*** angibt, an dem das Fahrzeug die Position s einnimmt.

Beispiel 2

Ein Fahrzeug beschleunigt 5 Sekunden lang und erreicht nach 8 m die Geschwindigkeit $v = 3\,\frac{m}{s}$. Ab dann fährt es mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

a) Wo befindet sich das Fahrzeug nach 20 Sekunden?

b) Wann hat das Fahrzeug insgesamt 80 m zurückgelegt?

Lösung:

Wir wissen, dass die Formel $v = \frac{s}{t}$ bzw. $s = v \cdot t$ nur für die gleichförmige Bewegung gilt. Hier müssen wir zum Weg jedoch stets die 8 m Anfangsstrecke dazurechnen. Von der insgesamt abgelaufenen Zeit müssen wir 5 s abziehen, denn erst danach beginnt die gleichförmige Bewegung.

Folglich arbeiten wir doch gleich mit dieser neuen Formel:

$$\boxed{s = s_0 + v \cdot \Delta t}$$

Diese Formel berücksichtigt die zuvor von 0 bis s_0 zurückgelegte Wegstrecke, s_0 ist also die Startposition für die gleichförmige Bewegung. Und wir müssen Δt für die gleichförmige Bewegung verwenden, weil wir die Fahrzeit auch erst ab s_0 messen.

Nun zur Rechnung:

a) Es ist $s_0 = 8$ m, $v = 3\,\frac{m}{s}$ und $\Delta t = 20\text{ s} - 5\text{ s} = 15\text{ s}$
Also folgt: $s_1 = 8\text{ m} + 3\,\frac{m}{s} \cdot 15\text{ s} = 8\text{ m} + 45\text{ m} = 53\text{ m}$

b) Die gesamte Wegstrecke sei nun s = 80 m. Wir verwenden unsere Formel:

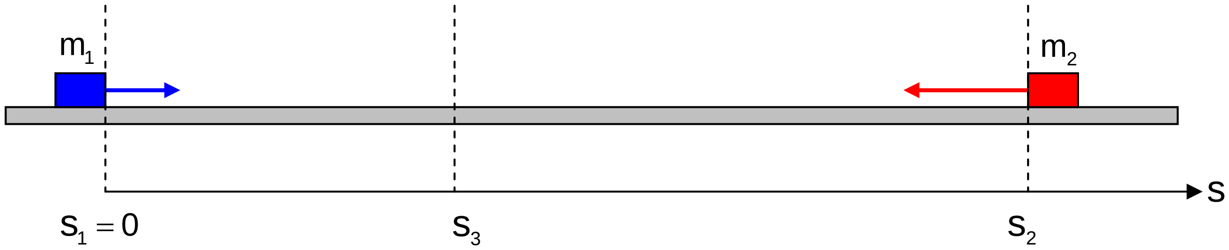
$$s = s_0 + v \cdot \Delta t$$

$$v \cdot \Delta t = s - s_0 \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{s - s_0}{v} = \frac{80\text{ m} - 8\text{ m}}{3\,\frac{m}{s}} = \frac{72\text{m}}{3\,\frac{m}{2}} = 24\text{s}$$

Dies ist nun die Fahrzeit ab s_0. Rechnen wir die 5s Startphase dazu, erhalten wir das Ergebnis: $t = t_0 + \Delta t = 5\text{ s} + 24\text{ s} = 29\text{ s}$.

3. Achtung Gegenverkehr !!

Die hier behandelten vier Beispiele werden ab Seite 15 nochmals graphisch gelöst.



BEISPIEL 1

Fahrzeug 1 mit der Masse m_1 startet an der Stelle s_1 =0 (m) mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2\frac{m}{2}$.

Zugleich startet Fahrzeug 2 mit der Masse m_2 an der Stelle s_2 = 200 (m) und fährt in entgegengesetzter Richtung auf m_1 zu. An welcher Stelle und nach welcher Zeit treffen sie aufeinander?

Lösung:

Jetzt muss man mit einer Wegachse arbeiten, damit man die Positionen der Fahrzeuge festhalten und nicht nur die gefahrenen Wegstrecken.

Wir benötigen für jeden der beiden Körper eine Gleichung zur Berechnung der Wegmarken (Koordinaten), an denen sie sich zu einem Zeitpunkt t befinden.

Für m_1: $s = v_1 \cdot t$ (1)

Für m_2: $s = s_2 - v_2 \cdot t$ (2)

Die Gleichung (2) beginnt mit der Wegmarke s_2, weil dort der Körper zur Zeit t = 0 ist.

Das Minuszeichen in (2) liegt daran, dass m_2 entgegen der Weg-Achse fährt, also wird die s-Koordinate immer kleiner.

An der Stelle s_3, wo beide zusammentreffen, gilt (bis dahin ist die Zeit t = x verstrichen:

für m_1: $s_3 = v_1 \cdot x$

für m_2: $s_3 = s_2 - v_2 \cdot x$

Wir setzen gleich und erhalten: $v_1 \cdot x = s_2 - v_2 \cdot x \quad | \; + v_2 \cdot x$

Diese Gleichung ist nun nach s umzustellen. Dazu bringt man zuerst x nach links:

$$v_1 \cdot x + v_2 \cdot x = s_2$$

Vereinfachen heißt jetzt „Ausklammern". Wir klammern x aus:

$$(v_1 + v_2) \cdot x = s_2 \quad | \; :(v_1 + v_2)$$

$$x = \frac{s_2}{v_1 + v_2} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{200\,m}{5\,\frac{m}{s}} = 40\,s.$$

Das heißt: Nach 40 Sekunden stoßen sie zusammen.

Kontrolle: An welcher Stelle befinden sich die beiden Körper nach 40 s?

m_1: $s_3 = 2\,\frac{m}{s} \cdot 40\,s = 80\,m$

m_2: $s_3 = 200\,m - 3\,\frac{m}{s} \cdot 40\,s = 200\,m - 120\,m = 80\,m.$

Wir sehen also: Nach 40 s und bei s_3 = 80 m treffen beide aufeinander.

BEISPIEL 2

Nun lassen wir die beiden Fahrzeuge zeitversetzt abfahren. Wir sehen bei beiden von einer Beschleunigungsphase beim Start ab und lassen sie gleich mit ihren Geschwindigkeiten losfahren.

Fahrzeug 1 (m_1) starte zur Zeit $t_1 = 0$ im Punkt $s_1 = 0$ mit $v_1 = 5\,\frac{m}{s}$
Fahrzeug 2 (m_2) starte zur Zeit $t_2 = 10s$ im Punkt $s_O = 810$ m mit $v_2 = 3\,\frac{m}{s}$.

Beide Fahrzeuge fahren aufeinander zu. Wann und wo treffen sie sich?

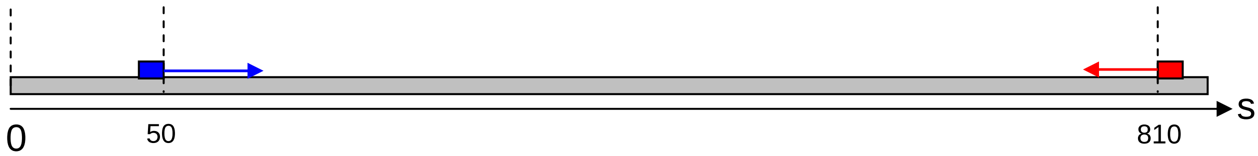
Lösung

Bewegungsgleichung von m_1 : $s = v_1 \cdot t$ für $t \geq 0$
Bewegungsgleichung von m_2 : $s = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$ für $t \geq t_2 = 10\text{ s}$

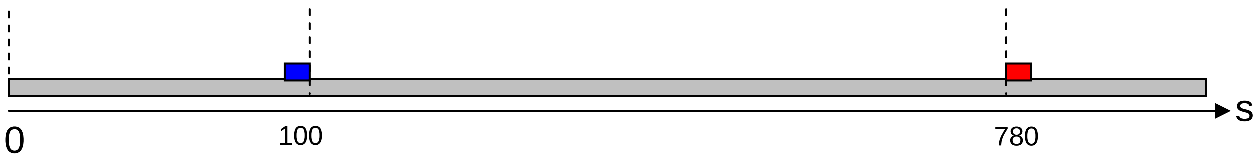
Hier ist etwas Besonderes passiert. Weil dieses Fahrzeug erst zur Zeit $t_2 = 10$ s abfährt, müssen wir seine Fahrzeit durch Subtraktion von $t_2 = 10$ s berechnen. Wenn also das 1. Fahrzeug schon t = 25 s fährt, dann fährt das 2. Fahrzeug erst $25\text{ s} - 10\text{ s} = 15\text{ s}$,

Spielen wir einige Zeitpunkte durch (die Skizzen sind nicht maßstäblich):

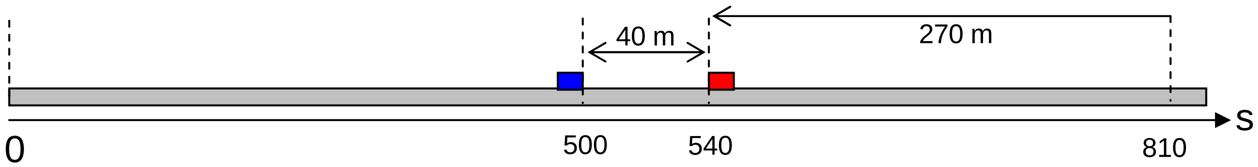
Zum Zeitpunkt t = 10 s hat sich m_1 um $s_1 = 5\frac{m}{s} \cdot 10s = 50m$ nach rechts bewegt, während m_2 gerade erst losfährt, also noch auf seinem Startplatz bei $s_2 = 810$ m steht:



Zum Zeitpunkt t = 20 s hat sich m_1 um $s_2 = 5\frac{m}{s} \cdot 20s = 100m$ nach rechts bewegt, während m_2 gerade erst 10 s gefahren ist und somit die Strecke $3\frac{m}{s} \cdot 10\text{s} = 30\text{ m}$ zurückgelegt hat, also bei der Marke $s = 810\text{ m} - 30\text{ m} = 780\text{ m}$ angekommen ist:



Zum Zeitpunkt t = 100 s hat sich m_1 um $s_3 = 5\frac{m}{s} \cdot 100s = 500\text{ m}$ nach rechts bewegt, während m_2 erst 90 s gefahren ist und somit die Strecke $3\frac{m}{s} \cdot 90\text{s} = 270\text{ m}$ zurückgelegt hat, also bei der Marke $s_3 = 810\text{ m} - 270\text{ m} = 540\text{ m}$ angekommen ist:
Die beiden Fahrzeuge sind nun noch 40 m voneinander entfernt.



Nun wollen wir das Zusammentreffen berechnen.

Aufeinandertreffen an der Stelle s zur Zeit t bedeutet

für m_1 :	$s = v_1 \cdot t$
für m_2 :	$s = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$

Gleichsetzen:

$$v_1 \cdot t = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$$
$$v_1 \cdot t = s_0 - v_2 \cdot t + v_2 \cdot t_2$$
$$v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = s_0 + v_2 \cdot t_2$$
$$(v_1 + v_2) \cdot t = s_0 + v_2 \cdot t_2$$
$$t = \frac{s_0 + v_2 \cdot t_2}{v_1 + v_2}$$

Mit Zahlen: $$t = \frac{810\,m + 3\,\tfrac{m}{s} \cdot 10s}{8\,\tfrac{m}{s}} = \frac{840\,m}{8\,\tfrac{m}{s}} = 105\,s$$

Und wo treffen sie aufeinander? Wir rechnen diese Stelle für beide Körper mit ihren Bewegungsgleichungen aus:

Für m_1 : $s = v_1 \cdot t = 5\,\tfrac{m}{s} \cdot 105\,m = 525\,m$

Für m_2 : $s = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2) = 810\,m - 3\,\tfrac{m}{s} \cdot (105\,s - 10\,s) = 810\,m - 3 \cdot 95\,m = 525\,m$

Bemerkung:

Man könnte (was auf dasselbe hinausläuft), auch die in den Skizzen von Seite 6 angewandte Methode verwenden und gleich mit Zahlen rechnen. Und das geht so:

Wir nennen t_3 die Zeit des Zusammentreffens. Dann hat m_1 die Wegstrecke $\Delta s = 5\,\tfrac{m}{s} \cdot t$ zurückgelegt und befindet sich an der Wegmarke s.

Der Körper m_2 hat dann in der Zeit (t – 10s) die Wegstrecke $\Delta s = (t - 10\,s) \cdot 3\,\tfrac{m}{s}$ zurückgelegt und befindet sich daher an der Wegmarke $s = 810\,m - (t - 10\,s) \cdot 3\,\tfrac{m}{s}$.

Da wir den Moment des Zusammentreffens berechnen, stellen beide Ausdrücke dieselbe Wegmarke dar, also gilt:

$$5\,\tfrac{m}{s} \cdot t = 810\,m - (t - 10\,s) \cdot 3\,\tfrac{m}{s}$$
$$5\,\tfrac{m}{s} \cdot t = 810\,m - t \cdot 3\,\tfrac{m}{s} + 30\,m$$
$$5\,\tfrac{m}{s} \cdot t + 3\,\tfrac{m}{s} \cdot t = 840\,m$$

Links t ausklammern: $$8\,\tfrac{m}{s} \cdot t = 840\,m$$
$$t = 105\,s$$

usw. Man erhält natürlich dasselbe Ergebnis!

BEISPIEL 3

Man kann natürlich auch zwei Fahrzeuge hintereinander her fahren lassen, wie dieses Beispiel zeigt:

Zur Zeit $t_1 = 0$ startet m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_1 = 4\,\frac{m}{s}$.
Nach $t_2 = 20$ s startet an derselben Stelle ein anderer Körper m_2 mit $v_2 = 6\,\frac{m}{s}$.

Nach welcher Zeit und nach welcher Wegstrecke holt m_2 den zuerst gestarteten Körper m_1 ein ? (Wir denken uns die Körper punktförmig.)

Lösung

Es wird empfohlen sich wieder wie in Beispiel 2 einige Momentaufnahmen zu berechnen, also etwa „Wo befinden sich die Körper nach 10 s, 20 s, 100 s usw.?“

Für die Lösung wollen wir professioneller vorgehen und die beiden Bewegungsgleichungen anschreiben:

Für m_1: $\quad s_1 = v_1 \cdot t \quad$ für $t \geq 0 \quad$ (1)

Für m_2: $\quad s_2 = v_2 \cdot (t - t_2) \quad$ für $t \geq t_2 = 20\text{ s} \quad$ (2)

Die Fahrzeit des 2. Körpers ist damit stets um t_2= 20 s verkürzt.

Für das Zusammentreffen setzen wir gleich. Die zugehörige Zeit nenne ich t_3:

$$v_1 \cdot t_3 = v_2 \cdot (t_3 - t_2)$$
$$v_1 \cdot t_3 = v_2 \cdot t_3 - v_2 \cdot t_2$$

Nun stellen wir die Gleichung so um, daß die gesuchte Zeit t_3 rechts steht und t_2 links:

$$v_2 \cdot t_2 = v_2 \cdot t_3 - v_1 \cdot t_3$$
$$v_2 \cdot t_2 = (v_2 - v_1) \cdot t_3$$
$$t_3 = \frac{v_2 \cdot t_2}{v_2 - v_1}$$

Mit Zahlen ergibt dies:

$$t_3 = \frac{6\,\frac{m}{s} \cdot 20\text{ s}}{2\,\frac{m}{s}} = 60\text{ s}$$

Nun der von beiden zurückgelegte Weg bis dahin:

Für m_1 berechnet: $\quad s_1 = v_1 \cdot t = 4\,\frac{m}{s} \cdot 60\,\text{s} = 240\,\text{m}$

Für m_2 berechnet: $\quad s_2 = v_2 \cdot (t - t_2) = 6\,\frac{m}{s} \cdot 40\,\text{s} = 240\,\text{m}$

Also treffen sie bei der Wegmarke $s_3 = 240$ m zusammen.

BEISPIEL 4

Nun ändern wir das Beispiel 3 noch dahingehend ab, dass der Körper m_1 schon im Punkt $s_0 = 600$ m vor m_2 entfernt startet. Nach 20 s dann setzt sich m_2 in Bewegung. Es ist nach wie vor $v_1 = 4\,\frac{m}{s}$ und $v_2 = 6\,\frac{m}{s}$.

Lösung:

Jetzt ändert sich die Bewegungsgleichung von m_1, weil dieser beim Start schon einen Vorsprung von $s_0 = 600$ m hat. Also gilt

Für m_1: $\quad s = s_0 + v_1 \cdot t \quad$ für $t \geq 0 \quad$ (1)

Für m_2: $\quad s = v_2 \cdot (t - t_2) \quad$ für $t \geq t_2 = 20\,\text{s} \quad$ (2)

Gleichsetzen ergibt:

$$s_0 + v_1 \cdot t = v_2 \cdot (t - t_2)$$
$$s_0 + v_1 \cdot t = v_2 \cdot t - v_2 \cdot t_2$$

t_3 wieder nach rechts:

$$s_0 + v_2 \cdot t_2 = v_2 \cdot t - v_1 \cdot t$$
$$s_0 + v_2 \cdot t_2 = (v_2 - v_1) \cdot t$$
$$t = \frac{s_0 + v_2 \cdot t_2}{v_2 - v_1}$$

Mit Zahlen ergibt dies:

$$t = \frac{600\,\text{m} + 6\,\frac{m}{s} \cdot 20\,\text{s}}{2\,\frac{m}{s}} = \frac{720\,\text{m}}{2\,\frac{m}{2}} = 360\,\text{s}$$

Und nun die Stelle, an der sie sich treffen:

Für m_1 berechnet: $\quad s = s_0 + v_1 \cdot t = 600\,\text{m} + 4\,\frac{m}{s} \cdot 360\,\text{s} = 2040\,\text{m}$

Für m_2 berechnet: $\quad s = v_2 \cdot (t - t_2) = 6\,\frac{m}{s} \cdot 340\,\text{s} = 2040\,\text{m}$

Man erhält natürlich wieder dieselbe Wegmarke. Es genügt also die Berechnung für einen Körper. Dennoch ist diese doppelte Rechnung eine Art Probe, ob man keinen Fehler gemacht hat.

4. Bewegungsdiagramme

4.1 Grundlagen

Wir haben in diesen Abschnitten die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung kennen gelernt.

Sie heißt allgemein $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Wird die Bewegung so ausgeführt, daß der Körper zur Zeit $t = 0$ bei der Wegmarke $s = 0$ startet, dann lautet diese Gleichung

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{bzw.} \quad s = v \cdot t.$$

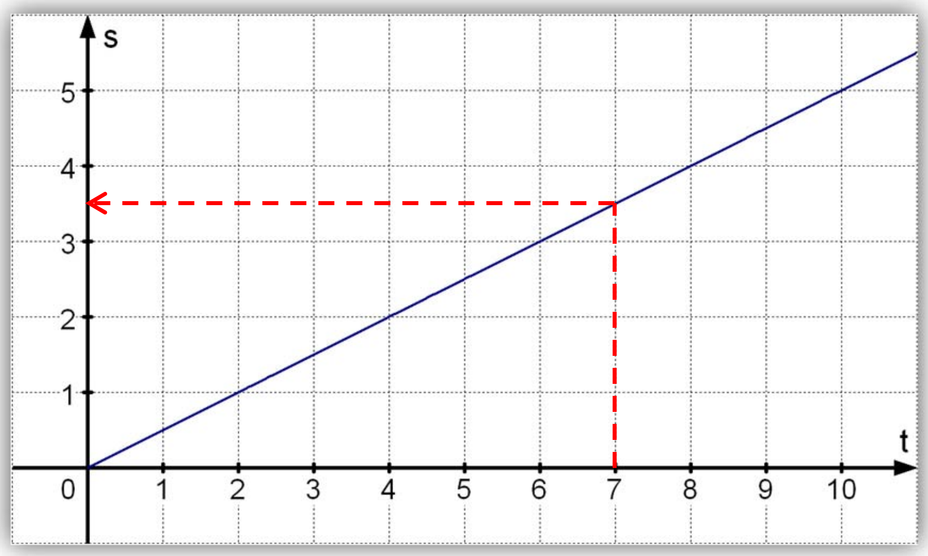
Diese letzte Gleichung nennt man auch die Bewegungsgleichung der gleichförmigen Bewegung. Dabei ist v eine feste Größe, eben die konstante Geschwindigkeit, und t die Zeitvariable. Oft verwendet man die funktionelle Schreibweise:

$$s(t) = v \cdot t$$

Wenn beispielsweise $v = 0{,}5\,\frac{m}{s}$ gegeben ist, dann lautet diese Gleichung:

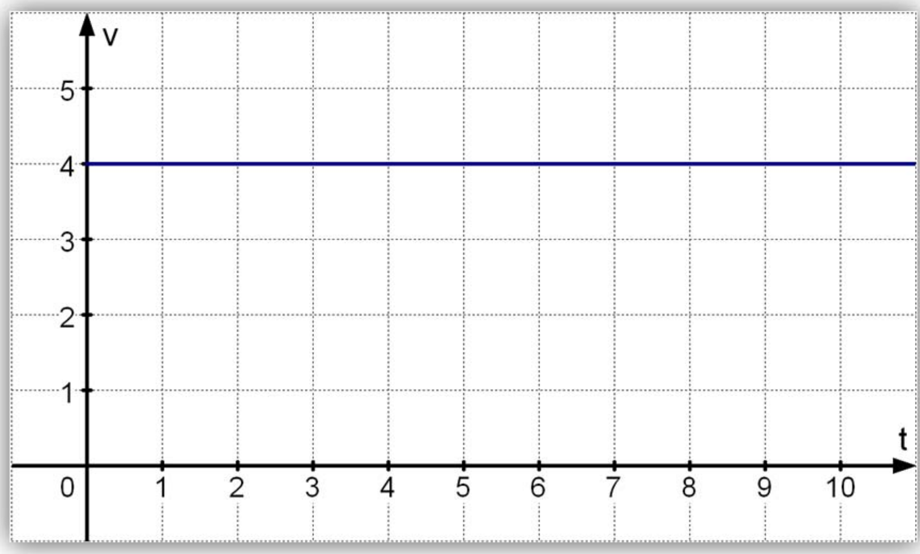
$$s(t) = 0{,}5\,\tfrac{m}{s} \cdot t$$

Wenn man dies mit der Gleichung $y = 0{,}5\,x$ vergleicht, ahnt man, was nun kommt: Man kann eine solche Funktion in einem Schaubild graphisch darstellen und erhält eine Gerade mit der Steigung 0,5:

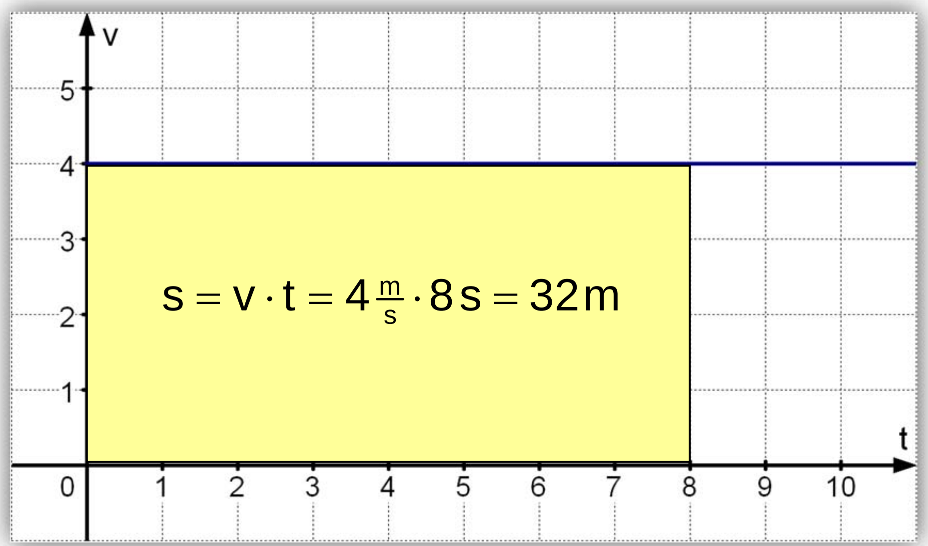


Dies ist das Weg-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung. Aus ihm kann man recht schnell Zusammenhänge ablesen, etwa, daß das Fahrzeug nach 7 Sekunden den Weg $s = 3{,}5$ m zurückgelegt hat (rote gestrichelte Linie - was man hier ja auch schnell berechnen kann).
Die Geschwindigkeit v stellt hier die **Steigung der Geraden** dar!

Man kann übrigens auch ein **v - t - Diagramm** aufzeichnen. Dieses gibt an, wie groß zu jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit ist. Dies ist hier besonders einfach: Sie ist immer gleich groß. Ist sie beispielsweise $4\,\frac{m}{s}$, dann ergibt das dieses Diagramm:



In diesem Diagramm steckt auch die zurückgelegte Wegstrecke verborgen. Betrachtet man die Gleichung $s = v \cdot t$, dann wird klar, daß das im folgenden Diagramm eingezeichnete Rechteck als Flächeninhalt den Weg nach 8 s hat:



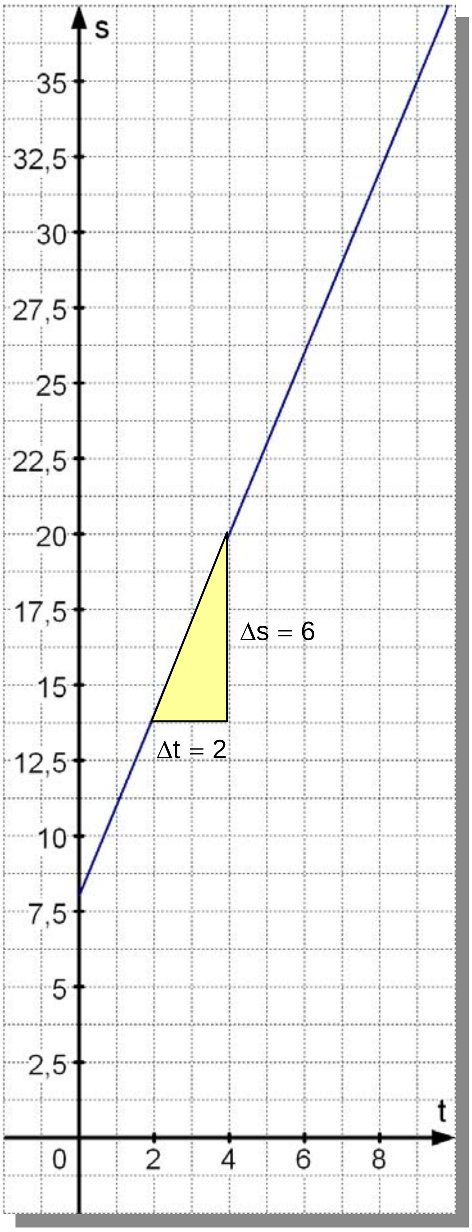
Das v - t - Diagramm spielt hier noch keine wichtige Rolle. Bei beschleunigten Bewegungen hat es eine größere Bedeutung. Doch den Zusammengang zwischen Weg und Flächeninhalt sollte man sich schon einmal merken!

4.2 Gleichförmige Bewegung mit Startposition

Auf Seite 3 und 4 wurden Bewegungen untersucht, bei denen die gleichförmige Bewegung zur Zeit $t = 0$ nicht bei $s = 0$ startet. :

Ein Fahrzeug beschleunigt zuerst und erreicht nach 8 m die Geschwindigkeit $v = 3\,\frac{m}{s}$. Dann fährt es mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Wir messen die Fahrzeit t erst ab dem Moment, wo das Fahrzeug sich gleichförmig bewegt. Dann lautet die Gleichung zur Berechnung der zurückgelegten Wegstrecke:



$$s = s_0 + v \cdot t$$

$$s = 8\,m + 3\,\frac{m}{s} \cdot t$$

Wir stellen diese Gleichung noch etwas um:

$$s = 3\,\frac{m}{s} \cdot t + 8\,m$$

und vergleichen mit $y = 3 \cdot x + 8$

Dies ergibt im s – t – Diagramm die abgebildete Gerade.

Das Absolutglied $s_0 = 8$ m gibt die Startposition an.
Dies ist in diesem Fall der Schnittpunkt mit der s-Achse.

Die Geschwindigkeit gibt wieder die Steigung der Geraden an. Ein Steigungsdreieck ist eingezeichnet.

Man erkennt, dass zur Zeitspanne 2 s stets die Wegstrecke 6 m gehört, also zu 1 s genau 3 m.

Wir erweitern das Beispiel:

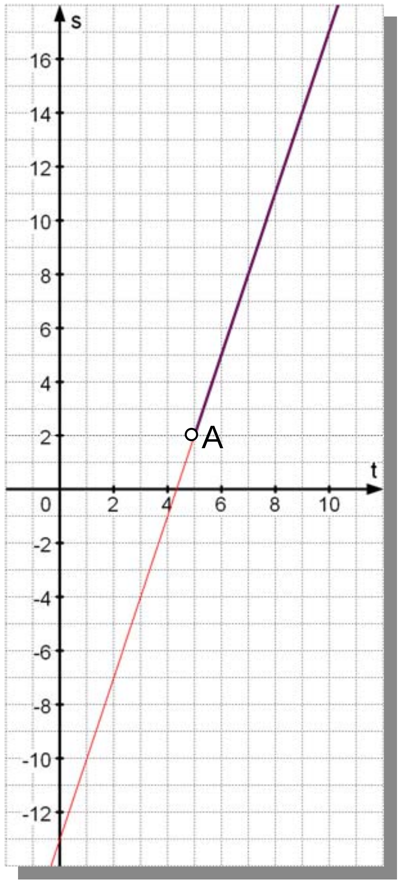
> *Ein Fahrzeug beschleunigt zuerst t_0 = 5 s lang und erreicht nach 2 m die Geschwindigkeit* $v = 3\,\frac{m}{s}$. *Dann fährt es mit konstanter Geschwindigkeit weiter.*

Jetzt gehen der Zeitpunkt und die zur gleichförmigen Bewegung gehörende Fahrzeit auseinander. Denn erst nach 5 Sekunden beginnt diese Bewegung, vorher wurde von 0 aus beschleunigt. Daher ist das Fahrzeug nach t = 12 s erst 7 s lang gleichförmig gefahren. Wir müssen also die 5 Sekunden abziehen, dafür aber die 2 m wieder dazu addieren:

Zur Zeit t = 12 s hat sich das Fahrzeug 7 s lang gleichförmig bewegt und dabei die Wegstrecke $\Delta s = v \cdot \Delta t = 3\frac{m}{s} \cdot 7s = 21m$ zurückgelegt. Es befindet sich also an der Wegmarke s = 2 m + 21 m = 23 m.

Allgemein berechnet man den Weg also so:

$$s(t) = s_0 + v \cdot \Delta t$$
$$s(t) = s_0 + v \cdot (t - t_0)$$
$$s(t) = s_0 + v \cdot t - v \cdot t_0$$
$$s(t) = (s_0 - v \cdot t_0) + v \cdot t$$
$$s(t) = \left(2m - 3\frac{m}{s} \cdot 5s\right) + 3\frac{m}{s} \cdot t$$
$$\boxed{s(t) = -13\,m + 3\frac{m}{2} \cdot t}$$



Dazu muss man angeben, dass diese Gleichung nur für $t \geq 5s$ gilt.

Testen wir unsere Gleichung:

Für t = 5 s erhält man: $s(5s) = -13m + 15m = 2m$

Dies war die Startposition nach 5 Sekunden.

Für t = 12 s: $s(12s) = -13m + 36m = 23m$

Oben hatten wir dies ohne Formel berechnet.

Rechts sieht man die zugehörige Gerade mit dem Achsenabschnitt - 13 und der Steigung 3.

Die rote Linie von der s-Achse bis zum Zustandspunkt A ist nicht realistisch, denn negative Strecken sind sinnlos. Hier gehört ein Kurvenbogen hinein, der im Ursprung beginnt. Doch dies gehört nicht hier her. Man könnte die Strecke bis zur s-Achse jedoch so deuten: Wäre das Fahrzeug von Anfang an konstant mit $3\frac{m}{s}$ gefahren, dann hätte es für dasselbe Endergebnis 13 m vorher starten müssen,

Zustandspunkt besagt, daß dort ein bestimmter Zustand herrscht, den man so beschreiben kann: $A(5s|2m)$, *also nach 5 s die Stelle s = 2 m.*

4.3 Gegenverkehr

Dieses Thema hatten wir schon ab Seite 5 besprochen. Nun wollen wir für die dort berechneten Beispiele die Diagramme erstellen und analysieren.

BEISPIEL 1

In $s_1 = 0$ fährt gleichförmig eine Masse m_1 mit der Geschwindigkeit $v_1 = 2\frac{m}{s}$.
In $s_2 = 200\,m$ fährt gleichmäßig eine Masse m_2 mit $v_2 = 3\frac{m}{s}$ aber auf m_1 zu.
Wo und nach welcher Zeit treffen sie aufeinander?

Graphische Lösung:

Die Bewegungsgleichungen lauten

für m_1 :	$s = v_1 \cdot t$	d.h.	$s(t) = 2\frac{m}{2} \cdot t$	(1)
für m_2 :	$s = s_2 - v_2 \cdot t$	d.h.	$s(t) = 200 - 3\frac{m}{s} \cdot t$	(2)

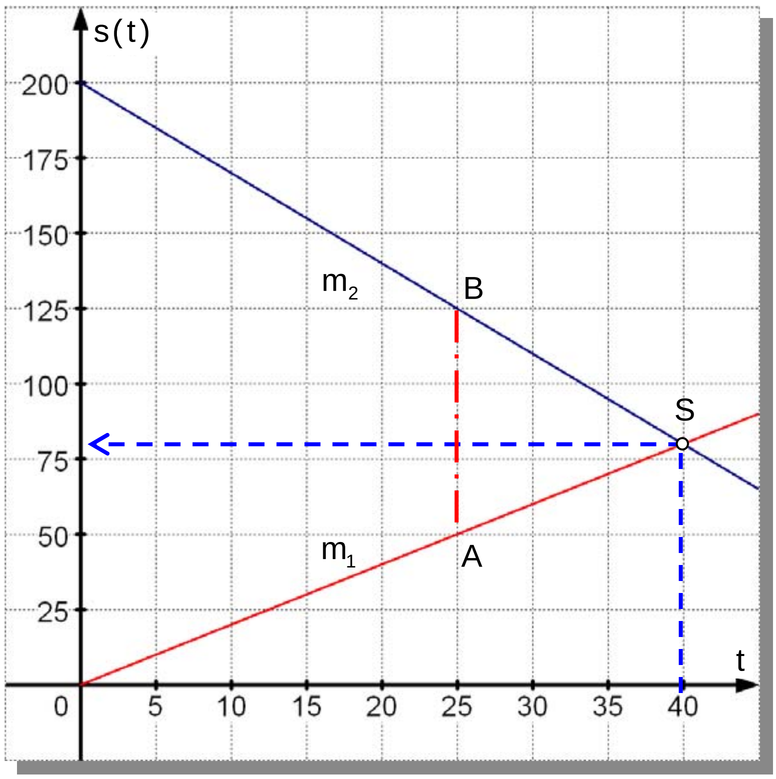
Stellt man die zugehörigen Geraden des Weg-Zeit-Diagramms dar, muß man die Einheiten auf den Achsen geschickt wählen:

Man erkennt, daß sich die Geraden im ***Zustandspunkt S*** schneiden.

Für S gilt:

$$S(40\,s|80\,m)$$

Sie sehen also, aus diesem “graphischen Fahrplan“ kann man beispielsweise ablesen, wann die Fahrzeuge zusammen treffen, aber auch, dass sie beispielsweise nach 25 s noch 75 m Abstand haben: Zustandspunkte A, B.



BEISPIEL 2

Fahrzeug 1 (m_1) startet zur Zeit $t_1 = 0$ im Punkt $s_1 = 0$ mit $v_1 = 5\,\frac{m}{s}$
Fahrzeug 2 (m_2) startet zur Zeit $t_2 = 10s$ im Punkt $s_O = 810$ m mit $v_2 = 3\,\frac{m}{s}$.

Beide Fahrzeuge fahren aufeinander zu. Wann und wo treffen sie sich?

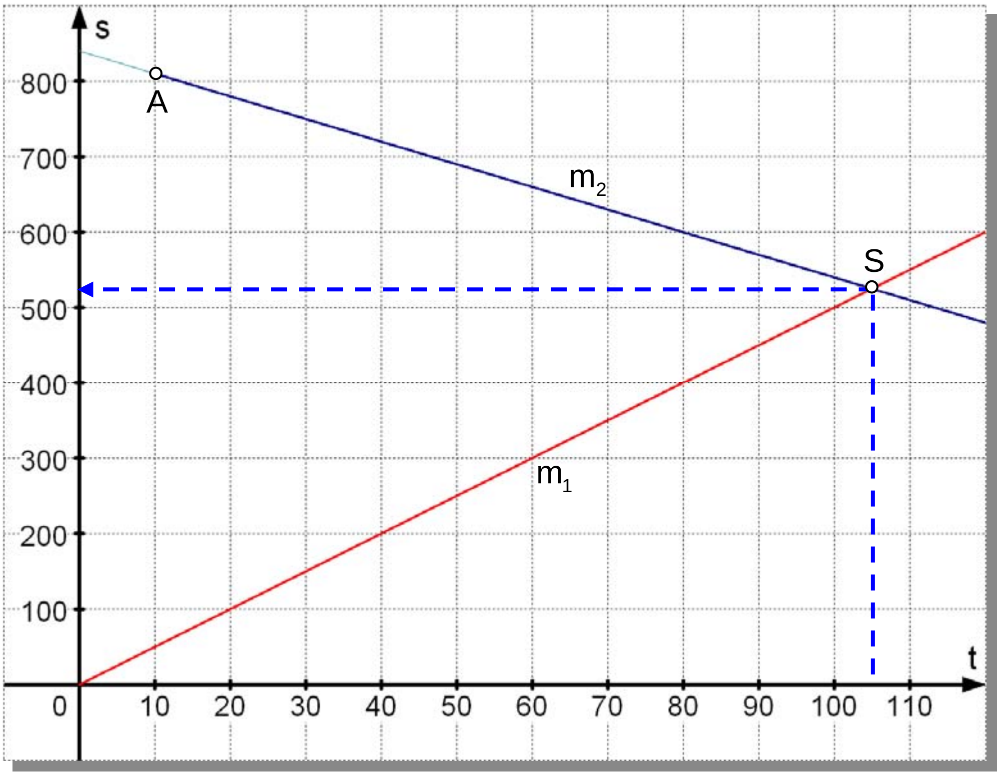
Graphische Lösung

Bewegungsgleichung von m_1 : $s(t) = v_1 \cdot t$ für $t \geq 0$
Bewegungsgleichung von m_2 : $s(t) = s_0 - v_2 \cdot (t - t_2)$ für $t \geq t_2 = 10\,s$

Mit Zahlen: m_1 : $s(t) = 5\,\frac{m}{s} \cdot t$ für $t \geq 0$
m_2 : $s(t) = 810\,m - 3\,\frac{m}{2} \cdot (t - 10)$ für $t \geq 10\,s$

Die zweite Gleichung sollte man durch Ausmultiplizieren noch umformen:
$s(t) = 840\,m - 3\,\frac{m}{2} \cdot t$ für $t \geq 10\,s$

Hier das Weg-Zeit-Diagramm für beide Bewegungen:



Man beachte, dass m_1 seine Bewegung erst im Zustandspunkt $A(10\,s|810\,m)$ beginnt. Daß seine „Gerade“ fällt zeigt eine negative Steigung an, also eine negative Geschwindigkeit, d.h. m_2 fährt m_1 entgegen. Und sie treffen sich im Schnittpunkt $S(105\,s|525\,m)$. Die Wegmarke 525 m ist natürlich hier nicht exakt ablesbar. Doch dazu gab es ja auf Seite 7 die Rechnung.

BEISPIEL 3

Zur Zeit $t_1 = 0$ startet m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_1 = 4\,\frac{m}{s}$.
Nach $t_2 = 20$ s startet an derselben Stelle ein anderer Körper m_2 mit $v_2 = 6\,\frac{m}{s}$ in derselben Fahrtrichtung.

Nach welcher Zeit und nach welcher Wegstrecke holt m_2 den zuerst gestarteten Körper m_1 ein? (Wir denken uns die Körper punktförmig.)

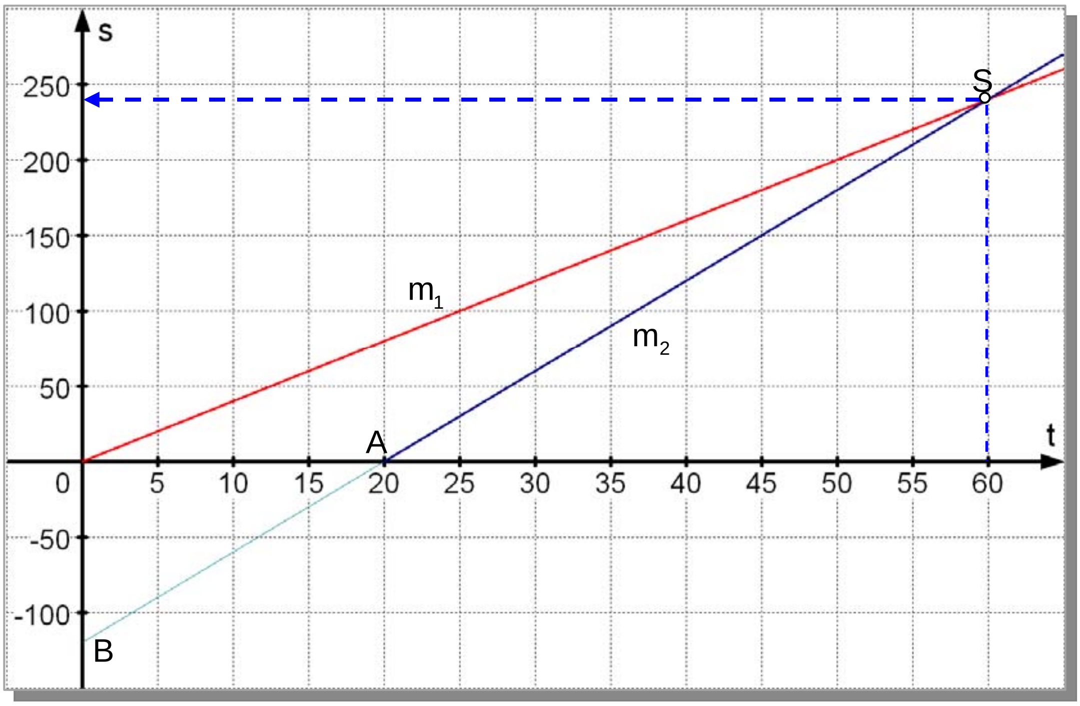
Graphische Lösung

Bewegungsgleichungen

für m_1:	$s(t) = v_1 \cdot t$	für $t \ge 0$	(1)
für m_2:	$s(t) = v_2 \cdot (t - t_2)$	für $t \ge t_2$	(2)

mit Zahlen:

für m_1:	$s(t) = 4\,\frac{m}{s} \cdot t$	für $t \ge 0$	(1)
für m_2:	$s(t) = 6\,\frac{m}{s} \cdot (t - 20\,s)$	d.h.	
	$s(t) = 6\,\frac{m}{s} \cdot t - 120\,m$	für $t \ge 20$ s	(2)



Das Weg-Zeit-Diagramm liefert uns wieder im Schnittpunkt $S(60\,s|240\,m)$ Zeit und Ort des Zusammentreffens, es zeigt aber auch im Zustandspunkt $A(20\,s|0\,m)$, wo m_2 startet. Die Verlängerung (Extrapolation) der m_2 - Geraden bis zum Zustandspunkt $B(0\,s|-120\,m)$ zeigt, dass bei gleichzeitigem Start beider Körper zur Zeit t = 0 der Körper m_2 120 m hinter m_1 hätte starten müssen, um dasselbe Zusammentreffen entstehen zu lassen.

BEISPIEL 4

Zur Zeit $t_1 = 0$ startet m_1 mit einer konstanten Geschwindigkeit von $v_1 = 4\,\frac{m}{s}$.
Nach $t_2 = 20$ s startet ein anderer Körper m_2 mit $v_2 = 6\,\frac{m}{s}$ in derselben Fahrtrichtung, seine Startposition befindet sich jedoch $s_0 = 600$ m von m_1.

Nach welcher Zeit und nach welcher Wegstrecke holt m_2 den zuerst gestarteten Körper m_1 ein? (Wir denken uns die Körper punktförmig.)

Lösung:

Jetzt ändert sich die Bewegungsgleichung von m_1, weil dieser beim Start schon einen Vorsprung von $s_0 = 600$ m hat. Also gilt

für m_1 :	$s_1 = s_0 + v_1 \cdot t$	für $t \geq 0$	(1)
für m_2 :	$s_2 = v_2 \cdot (t - t_2)$	für $t \geq t_2$	(2)

Mit Zahlen:

für m_1 :	$s_1 = 600\,m + 4\,\frac{m}{s} \cdot t$	für $t \geq 0$	(1)
für m_2 :	$s_2 = 6\,\frac{m}{s} \cdot (t - 20\,s)$	d.h.	
	$s_2 = 6\,\frac{m}{s} \cdot t - 120\,m$	für $t \geq 20\,s$	(2)

Zur Interpretation des folgenden s-t-Diagramms muß nach Beispiel 3 nichts mehr gesagt werden.