PHYSIK
Kräfte

Kräfte
Überlagerungen
Zerlegungen

Datei Nr. 91011

Friedrich W. Buckel

Juli 2002

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Inhalt

Hinweise:

Im folgenden wird ständig die Trigonometrie verwendet.
Daher eignen sich viele Aufgaben auch als Übungsaufgaben
für trigonometrische Anwendungen

1. Kräfte sind Vektoren

1.1 Überlagerung zweier gleich großer Kräfte

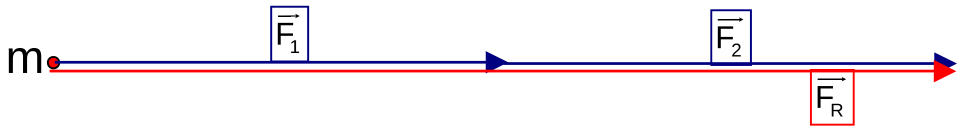
Diese Überschrift besagt, daß man mit Kräften rechnen kann und dabei die Regeln der Vektorrechnung zu beachten hat.

WISSEN: Kräfte werden sowohl durch ihren Betrag, als auch durch ihre Richtung festgelegt.
Diese Doppeleigenschaft hat zur Folge, daß man die Überlagerung zweier (bzw. mehrerer) Kräfte nach den Regeln der Vektoraddition durchführen kann.

Die Maßeinheit für Kräfte ist in der Regel „Newton" (N) . Schreibt man also $F = 6$ N , dann ist dies lediglich die Angabe des Betrages der Kraft, oder der Stärke der Kraft.

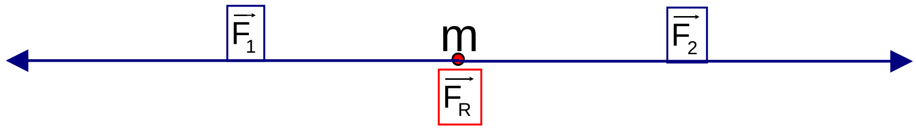
Um die Vektoreigenschaft einer Kraft zu erkennen, lassen wir an einem punktförmigen Körper zwei Kräfte der Stärke 6 N angreifen. Nur der ahnungslose Laie wird dann meinen, daß insgesamt 12 N auf den Körper wirken. Man nennt die insgesamt wirkende Kraft die ***resultierende Kraft ,*** und deren Richtung und Betrag hängt davon ab, in welche Richtung die beiden Einzelkräfte wirken, und welchen Winkel sie zueinander bilden. Sehen wir uns einige Beispiele an.

(1) $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (die Pfeile sollen andeuten, daß jetzt auch die Richtung der Kraft beachtet wird, nicht nur ihre Stärke) sollen in dieselbe Richtung zeigen:



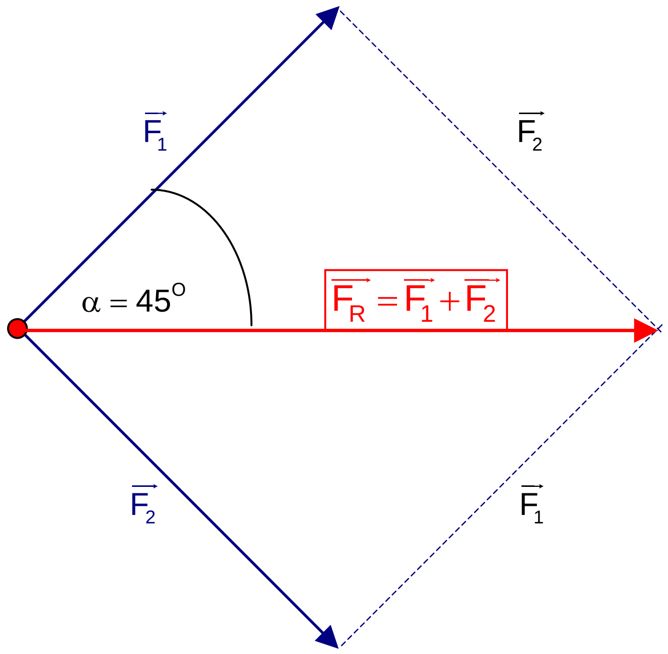
Als Maßstab wurde für 1 N 1 cm verwendet. Die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, ihr Betrag ist daher 12 N.
(Nur in diesem Fall kann man die Beträge addieren: 6 N + 6 N = 12 N).

(2) Nun sollen $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ die entgegengesetzte Richtung haben:



´ Dadurch heben sich ihre Wirkungen auf, und auf die Masse m wirkt letztendlich keine Kraft mehr. Die resultierende Kraft hat den Betrag 0.
Jetzt gilt: $F_R = F_1 – F_2 = 0$ N.
Trotzdem schreibt man vektoriell: $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$!

(3) Nun sollen $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ rechtwinklig zueinander sein:



Man bildet ein Parallelogramm aus $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, das in diesem Fall zu einem Quadrat wird. Die resultierende Kraft ist die Diagonale.

Mit Hilfe der Trigonometrie berechnet man:

$$\sin\alpha = \frac{F_2}{F_R} \Rightarrow$$

$$F_R = \frac{F_2}{\sin 45^O} = 8{,}49\ \text{N}$$

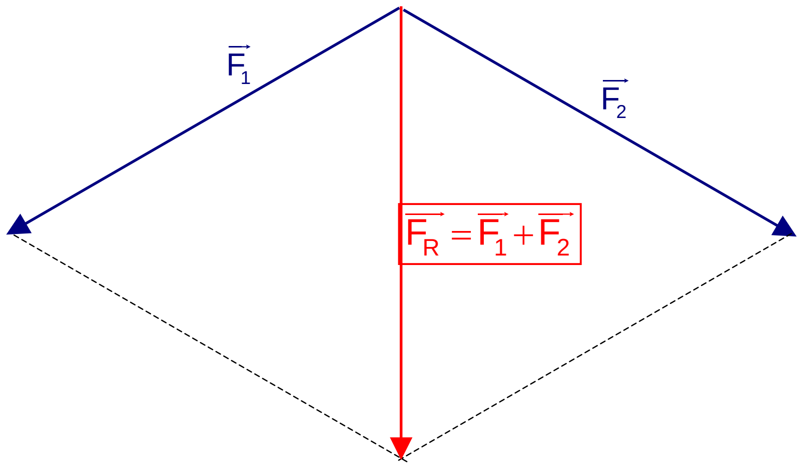
Oder mittels Pythagoras:

$$F_R^{\ 2} = F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} \Rightarrow$$

$$F_R = \sqrt{36+36}\ \text{N} = \sqrt{36\cdot 2}\ \text{N}$$

$$F_R = 6\sqrt{2}\,\text{N} = 8{,}49\ \text{N}$$

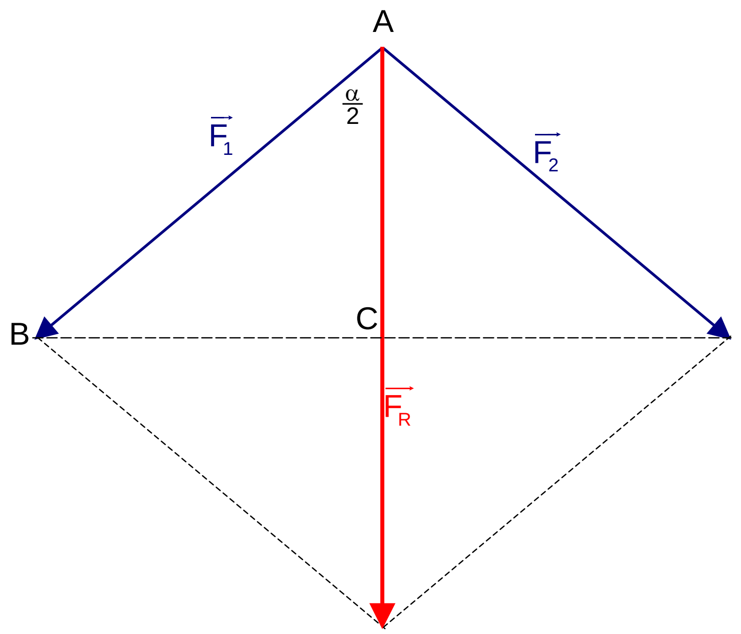
(4) Nun lassen wir die beiden Kräfte mit 120^O einwirken:



Damit entsteht ein Parallelogramm, das durch die Diagonale F_R in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegt wird, d.h. F_R hat denselben Betrag wie $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$.

(5) Nun verwenden wir $\alpha = 100^{O}$ zwischen $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ und $F_1 = F_2 = 6\,N$

Zuerst die graphische Lösung:



Die Berechnung der resultierenden Kraft sieht dann so aus:

Weil $F_1 = F_2$ liegt eine Raute vor.
Die beiden Diagonalen zerlegen diese Raute in vier rechtwinklige Dreiecke.

Im Dreieck ABC gilt:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}F_R}{F_1} = \frac{F_R}{2F_1} \Rightarrow F_R = 2F_1 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 12\,N \cdot \cos 50^{O} = 7{,}71\,N$$

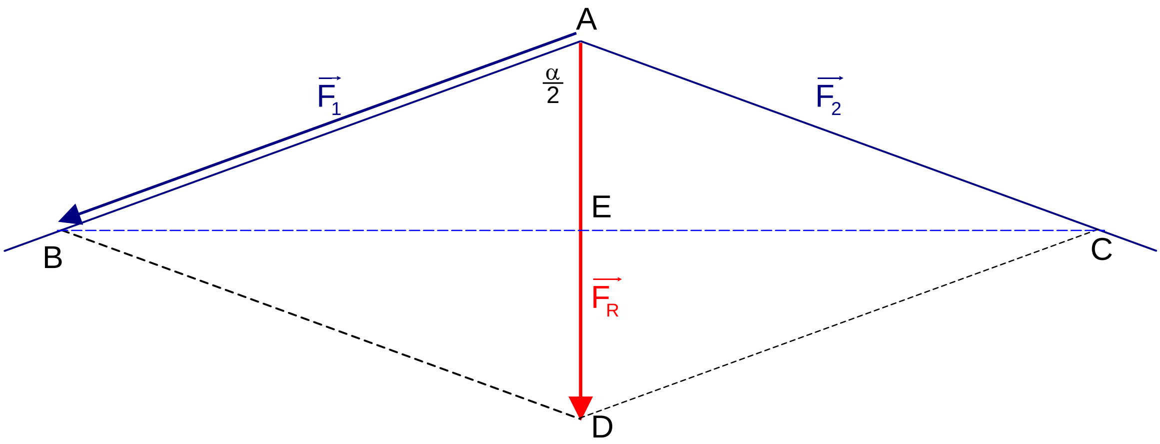
1.2 Zerlegung in zwei gleich große Kräfte

Beispiel 1:

Zwei gleich große Kräfte greifen unter einem Winkel von 140^O an einem Massenpunkt an. Ihre resultierende Kraftwirkung hat die Stärke 50 N. Wir groß sind die beiden ursprünglichen Kräfte ?

Lösung:

Wir wollen die Lösung zuerst graphisch durchführen. Dazu konstruiert man eine Raute und macht die Diagonale 5 cm lang ($1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{N}$):



Konstruktionsbeschreibung:

Zeichne zwei Halbgeraden, die einen Winkel von 140^O einschließen und deren Winkelhalbierende (rot). Diese soll zur Diagonalen der Länge 5 cm werden. Also zeichnet man durch den Punkt D die Parallelen zu den Halbgeraden. Diese schneiden die beiden Halbgeraden in B und C.

Der hier daneben gezeichnete Pfeil $\overrightarrow{AB}$ stellt die Kraft $\vec{F}_1$ dar.
Man zeichnet nun die zweite Diagonale BC ein, so daß man das rechtwinklige Teildreieck ABE erhält. Darin kann man F_1 so berechnen:

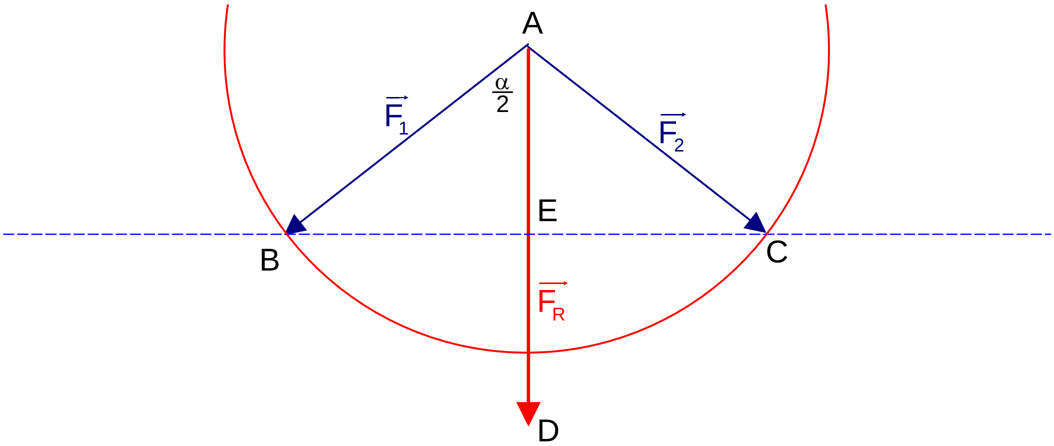
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}F_R}{F_1} = \frac{F_R}{2\cdot F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{F_R}{2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{50\,\text{N}}{2\cdot\cos 70^O} = \frac{25\,\text{N}}{\cos 70^O} = 73{,}1\,\text{N}$$

Beispiel 2:

Zwei gleich große Kräfte greifen der Stärke 40 N greifen an einem Massenpunkt an. Ihre resultierende Kraftwirkung hat die Stärke 50 N. Berechne den Winkel zwischen den beiden ursprünglichen Kräften.

Lösung:

Wir wollen die Lösung zuerst graphisch durchführen. Dazu beginnt man Mit den beiden Diagonalen. Die Vertikale AD (Resultierende) machen wir 5 cm lang ($1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 10\,\text{N}$), diese wird halbiert (E) und dazu zeichnen wir die Mittelsenkrechte ein.



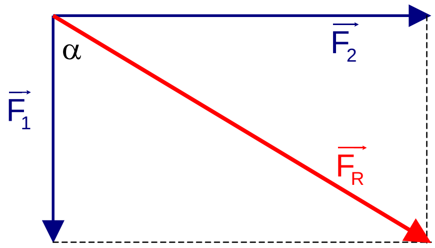
Nun zeichnet man den Kreis um A mit Radius 4 cm (40 N) . Dieser schneidet die gestrichelte horizontale Mittelsenkrechte in B und C. Damit hat man $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{F}_2 = \overrightarrow{AC}$.

Die Rechnung läuft wie gehabt im rechtwinkligen Teildreieck ABE:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}F_R}{F_2} = \frac{25\,\text{N}}{40\,\text{N}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 51{,}3^\circ \text{ und } \alpha = 102{,}6^\circ.$$

1.3 Überlagerung verschieden großer Kräfte

1. Fall: Rechtwinklige Überlagerung



Beispiel:

Es sei $F_1 = 3$ N und $F_2 = 5$ N

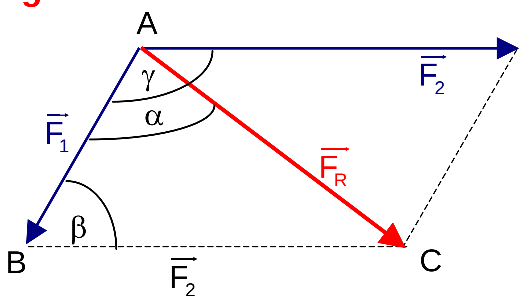
Dann gilt nach Pythagoras:

$$F_R^{\,2} = F_1^{\,2} + F_2^{\,2} \;\Rightarrow\; F_R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} = \sqrt{9\,N^2 + 25\,N^2} = \sqrt{34}\,N \approx 5{,}83\,N$$

Den Winkel α zur Angabe, in welche Richtung (gemessen von $\vec{F}_1$ aus) die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ wirkt, berechnet man am besten aus den beiden gegebenen Größen F_1 und F_2. Dann benötigt man die Tangensfunktion:

$$\tan\alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{5}{3} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 59^{O}.$$

2. Fall: Nichtrechtwinklige Überlagerung



Beispiel:

Es sei $F_1 = 3$ N und $F_2 = 5$ N
und $\gamma = 120^{O}$

Nun ist das Dreieck nicht mehr rechtwinklig, also kann auch der Satz des Pythagoras nicht mehr verwendet werden.
Dafür nimmt man seine Verallgemeinerung für das beliebige Dreieck, also den Kosinussatz.

Er gestattet die Berechnung einer Seite, wenn man die beiden anderen kennt und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel. Hier kennen wir F_1 und F_2. Beide Größen kommen als Strecken im Kräfteparallelogramm zweimal vor.
Aus γ kann man $\beta = 180^{O} - \gamma = 60^{O}$ berechnen. Damit lautet der Kosinussatz im Dreieck ABC so:

$$F_R^{\,2} = F_1^{\,2} + F_2^{\,2} - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cos\beta$$

Man sieht deutlich, daß diese Formel wie der Satz des Pythagoras beginnt, aber ein Korrekturglied mit dem doppelten Produkt und dem Kosinus hat, welches ausgleicht, daß der Winkel nun doch nicht 90^{O} hat.

Mit Zahlen: $F_R = \sqrt{9\,N^2 + 25\,N^2 - 30\,N^2 \cdot \cos 60^{O}} = \sqrt{19}\,N \approx 4{,}36\,N$

Nun fehlt zur vollständigen Angabe der Winkel, den $\vec{F_R}$ mit $\vec{F_1}$ (oder $\vec{F_2}$) bildet. Wir haben also schon wieder eine geometrische Aufgabe vor uns.

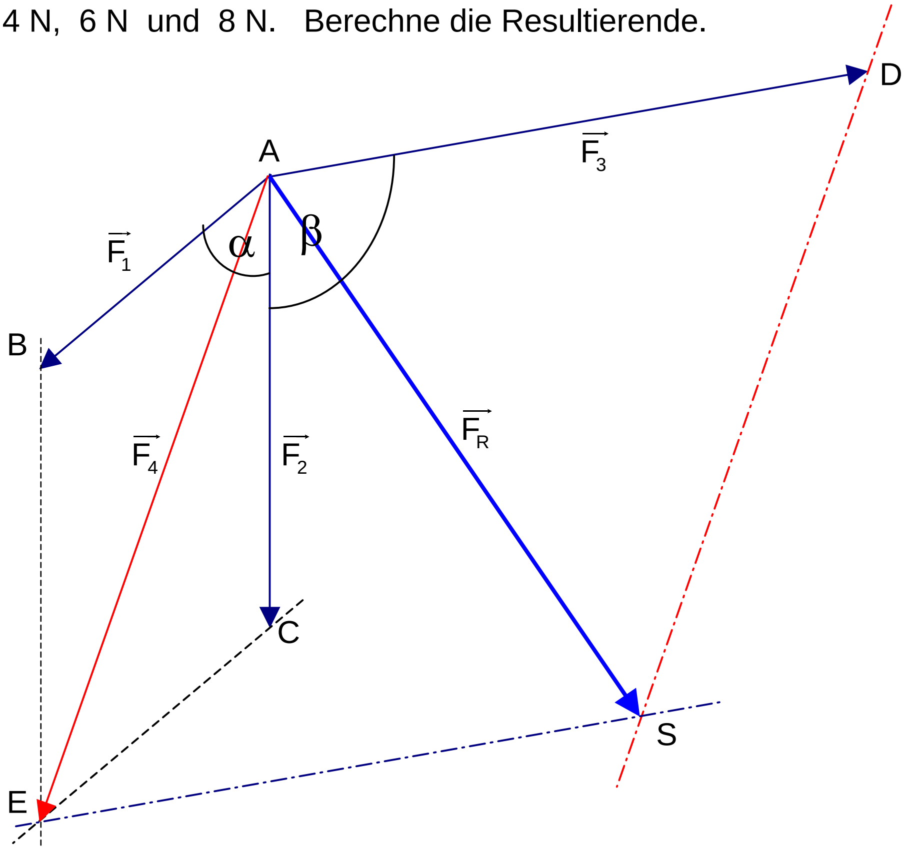
Kennt man in einem Dreieck zwei Seiten und den Gegenwinkel einer dieser Seiten, dann hilft uns der Sinussatz weiter. Er heißt hier so:

$$\frac{\sin\alpha}{F_2} = \frac{\sin\beta}{F_R} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{F_2 \cdot \sin\beta}{F_R} = \frac{5\,\mathrm{N} \cdot \sin 60^{\circ}}{4{,}36\,\mathrm{N}} \Rightarrow \alpha \approx 83{,}3^{\circ}$$

Überlagerung von 3 Kräften

Beispiel:

Die Kräfte $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ und $\vec{F_3}$ schließen die Winkel 50° und 100° ein und haben die Beträge 4 N, 6 N und 8 N. Berechne die Resultierende.

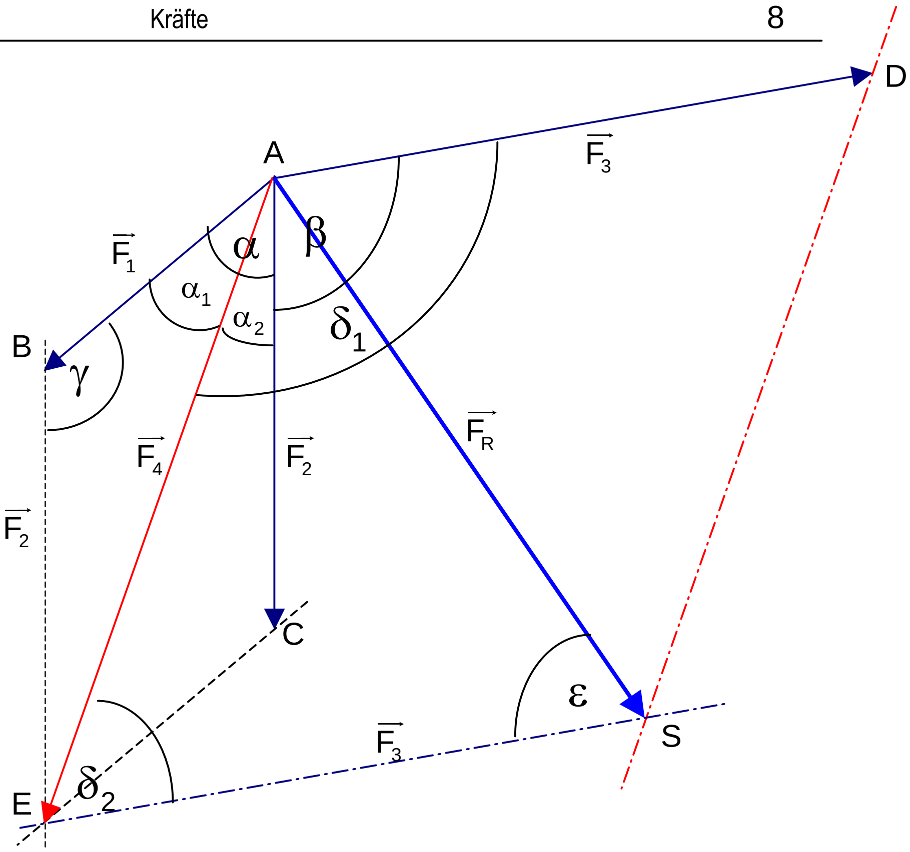


Zunächst sei die Konstruktion erklärt:

1. Schritt: Konstruiere aus $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ das Parallelogramm ABCE. Die Diagonale AE zeigt dann die Resultierende Kraft $\vec{F_4} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ an.

2. Schritt: Konstruiere aus $\vec{F_3}$ und $\vec{F_4}$ das Parallelogramm AEDS. Die Diagonale AS zeigt dann die Resultierende Kraft $\vec{F_R} = \vec{F_4} + \vec{F_3} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$ an.

Und nun zur Rechnung.



Im Dreieck ABE kennt man die Seiten AB (F_1) und BE (F_2) sowie den eingeschlossenen Winkel:

$\gamma = 180^O - \alpha = 130^O$

Also läßt sich mit dem Kosinussatz die dritte Seite AE (F_4) berechnen:

$$F_4^{\ 2} = F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\gamma$$

Dies ergibt

$F_4 = 9{,}1$ N.

Jetzt wird es strategisch schwerer. Wir müssen eine Reihe von Winkeln berechnen um weiter zu kommen.

Zuerst rechnen wir mit dem Sinussatz im Dreieck ABE den Teilwinkel α_1 aus:

$$\frac{\sin\alpha_1}{F_2} = \frac{\sin\gamma}{F_4} \Rightarrow \sin\alpha_1 = \frac{F_2 \cdot \sin\gamma}{F_4} \Rightarrow \alpha_1 = 30{,}3^O$$

Damit erhält man den zweiten Teilwinkel: $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 50^O - 30{,}3^O = 19{,}7^O$

Nun wechseln wir ins Parallelogramm AESD über. Dieses hat an der Ecke A den Winkel $\delta_1 = \beta + \alpha_2 = 119{,}7^O$. Damit erhält man an der Ecke E den für die weitere Berechnung wichtigen Winkel $\delta_2 = 180^O - \delta_1 = 60{,}3^O$

<u>Berechnung der resultierenden Kraft</u> F_R , d.h. der Strecke AS im Dreieck AES:

Wir kennen die Strecken AE ($\triangleq F_4$) und ES ($\triangleq F_3$) und den eingeschlossenen Winkel δ_2, also liefert der Kosinussatz dessen Gegenseite AS ($\triangleq F_R$):

$$F_R^{\ 2} = F_4^{\ 2} + F_3^{\ 2} - 2 \cdot F_4 \cdot F_3 \cdot \cos\delta_2$$

Dies ergibt $F_R = 8{,}6$ N

<u>Nun noch die Richtung</u> von $\vec{F}_R$. Dazu kann man beispielsweise den Winkel ε bei S berechnen. Der liegt auch zwischen $\vec{F}_3$ und $\vec{F}_R$ bei A.

Sinussatz im Dreieck AES: $\frac{\sin\varepsilon}{F_4} = \frac{\sin\delta_2}{F_R} \Rightarrow \sin\varepsilon = \frac{F_4 \cdot \sin\delta_2}{F_R} = \frac{9{,}1}{8{,}6} \cdot \sin 60{,}3^O$

Ergebnis: $\varepsilon = 66{,}8^O$.

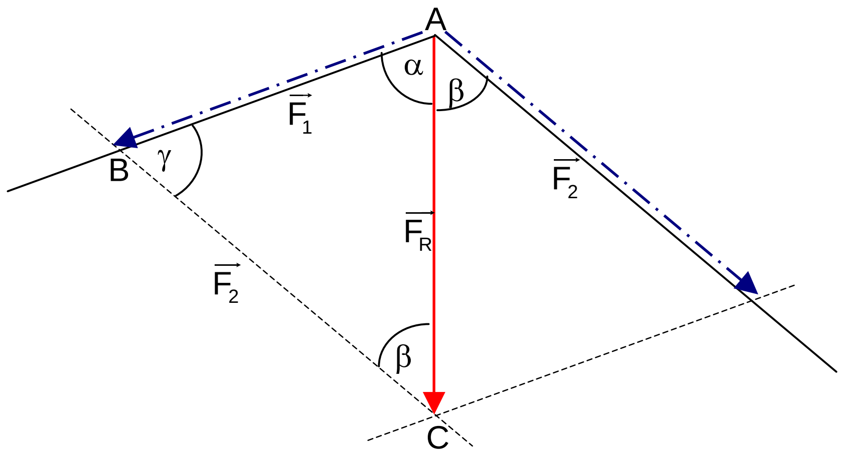
1.4 Zerlegung in vorgegebene Richtungen

Beispiel:

Es sei $F_R = 5$ N gegeben.
Diese Kraft soll in zwei sich überlagernde Komponenten zerlegt werden, die mit $\vec{F}_R$ die Winkel $\alpha = 70^O$ und $\beta = 50^O$ bilden.

Lösung.

Zuerst die konstruktive Lösung. Man zeichnet einen Vektorpfeil von $\vec{F}_R$ z.B. mit der Länge 5 cm (d.h. Maßstab: 1 N ≙ 1 cm) und zeichnet dann 2 Halbgeraden mit den Winkeln $\alpha = 70^O$ und $\beta = 50^O$ ein.
Durch die Spitze von $\vec{F}_R$ zeichnet man dann die Parallelen zu diesen Halbgeraden.
So erhält man das gesuchte Kräfteparallelogramm. Die beiden gesuchten Kräfte wurden mit Strichpunkten daneben gezeichnet.



Zunächst berechnet man den dritten Winkel im Dreieck ABC: $\gamma = 180^O - \alpha - \beta = 60^O$.
Nun kennen wir im Dreieck ABC zwei Winkel und eine Gegenseite, also kann man jede andere Seite mit dem Sinussatz berechnen:

Berechnung der Seite AB.

Dazu braucht man den Gegenwinkel β und das Gegenpaar AC (F_R) und γ:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AC}}{\sin\gamma} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AC}\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \text{d.h.} \quad F_1 = \frac{F_R \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{5\,\mathrm{N}\cdot\sin 50^O}{\sin 60^O} \approx 4{,}4\,\mathrm{N}$$

Berechnung der Seite BC.

Dazu braucht man den Gegenwinkel α und das Gegenpaar AC (F_R) und γ:

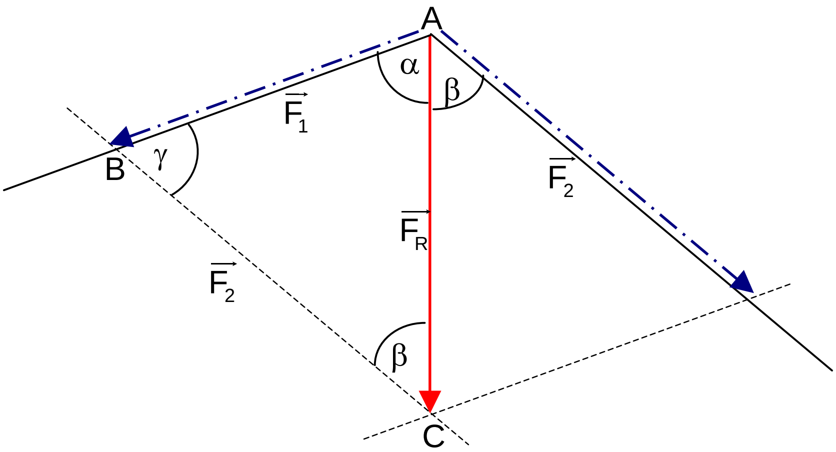
$$\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AC}}{\sin\gamma} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AC}\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{d.h.} \quad F_2 = \frac{F_R \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{5\,\mathrm{N}\cdot\sin 70^O}{\sin 60^O} \approx 5{,}4\,\mathrm{N}$$

1.5 Zerlegung in vorgegebene Komponenten

Beispiel:

Es sei $F_R = 5$ N gegeben.
Diese Kraft soll in zwei sich überlagernde Komponenten $F_1 = 4{,}4$ N und $F_2 = 5{,}4$ N zerlegt werden. Welche Winkel bilden diese Kräfte mit F_R ?

Lösung.



Dies ist dasselbe Beispiel wie auf der Seite zuvor, nur sollen jetzt die Winkel berechnet werden.

Dies ist wieder ein Fall für den Kosinussatz, denn wir kennen jetzt im Teildreieck ABC alle drei Seiten: Da wir α suchen, verwenden wir diese Formel:

$$F_2^2 = F_1^2 + F_R^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_R \cdot \cos\alpha$$

$$2 \cdot F_1 \cdot F_R \cdot \cos\alpha = F_1^2 + F_R^2 - F_2^2$$

$$\cos\alpha = \frac{F_1^2 + F_R^2 - F_2^2}{2 \cdot F_1 \cdot F_R} = \frac{4{,}4^2 + 5^2 - 5{,}4^2}{2 \cdot 4{,}4 \cdot 5} \Rightarrow \alpha = 69{,}8^{\mathrm{O}}$$

Auf der Seite vorher hatten wir $\alpha = 70^{\mathrm{O}}$. Doch die Werte für F_1 und F_2 sind gerundet, und so haben wir auch hier diese kleine Abweichung.

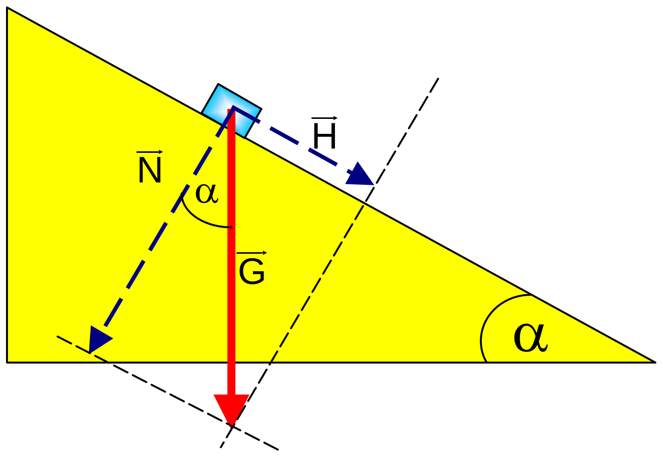
Den Winkel β rechnet man nun mit dem Sinussatz aus, dies geht schneller als mit dem Kosinussatz:

$$\frac{\sin\beta}{F_1} = \frac{\sin\alpha}{F_2} \Rightarrow \sin\beta = \frac{F_1 \cdot \sin\alpha}{F_2} \Rightarrow \beta = 49{,}9^{\mathrm{O}} \approx 50^{\mathrm{O}}.$$

Damit sind die gesuchten Winkel gefunden.

2. *Physikalische Beispiele*

2.1 Die schiefe Ebene



Auf einen Körper, der auf einer schiefen Ebene liegt (in Ruhe) oder in Bewegung ist, wirkt in der Regel nur die Erdanziehungskraft, die Gravitationskraft, die sich uns als Gewichtskraft $\vec{G}$ (oder auch $\vec{F}_G$) äußert. Doch diese Kraft könnte nur dann in „ihrer" Richtung wirken, wenn darunter keine Unterlage wäre. Die schiefe Ebene verhindert dies und sorgt dafür, daß sich zwei andere Wirkungen herausbilden.

Zum einen ist eine Abwärtsbewegung möglich, zum anderen wird der Körper gegen die Unterlage gedrückt. Um die Größe dieser beiden Kraftwirkungen, die beide von der Gewichtskraft ausgehen, zu berechnen, zerlegt man die Gewichtskraft wie gezeigt in zwei Komponenten.

Die erste Komponente $\vec{H}$ heißt **Hangabtriebskraft**. Sie verursacht einen Bewegung abwärts (falls die bremsende Reibungskraft dies zuläßt).

Die zweite Komponente $\vec{N}$ heißt **Normalkraft**. (Dieser Begriff kommt aus der Mathematik, wo „normal" auch „senkrecht" bedeuten kann). Die Normalkraft drückt den Körper senkrecht gegen die Unterlage, was die Reibung verursacht.

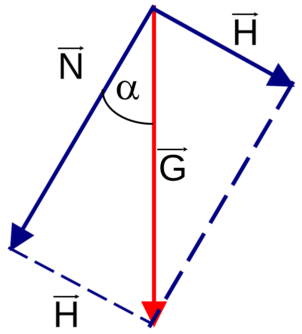
Der Neigungswinkel α der Ebene tritt bei der Zerlegung noch einmal auf. Das Kräfteparallelogramm wird zum Rechteck, so daß wir mit der Trigonometrie diese Formeln erhalten:

Hangabtriebskraft:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{H}{G} \Rightarrow H = G \cdot \sin\alpha}$$

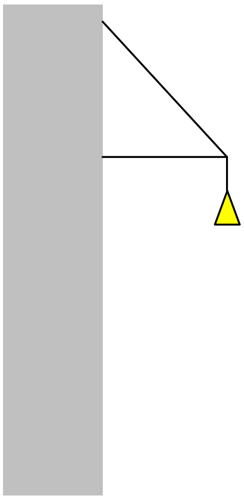
Normalkraft:

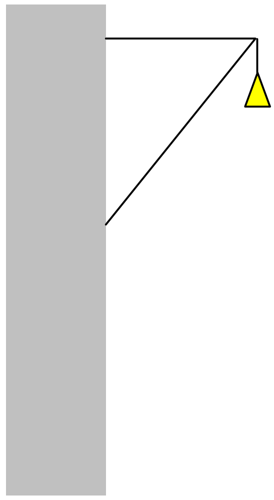
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{N}{G} \Rightarrow N = G \cdot \cos\alpha}$$



2.2 Lampenprobleme: Ausleger und Seilaufhängung

Um eine Lampe an einer Hauswand aufzuhängen kann man sich eines sogenannten Auslegers bedienen. Diese sind auf mehrere Arten denkbar. Zwei sollen vorgestellt werden:





Der Typ 1 (links) benötigt eine horizontale Stange und ein Seil, das von schräg oben her den Zug abfängt und auf die Hauswand überträgt.

Der Typ 2 (rechts) benötigt eine schräge Stange und ein Seil, das den Zug abfängt und auf die Hauswand überträgt

Wenden wir uns ausführlicher dem 1. Typ zu und zeichnen Kräfte ein:

Die Gewichtskraft wirkt über zwei Komponenten:

$\vec{F}_1$ ist eine **Zugkraft**, die über das Seil an die Hauswand übertragen wird.

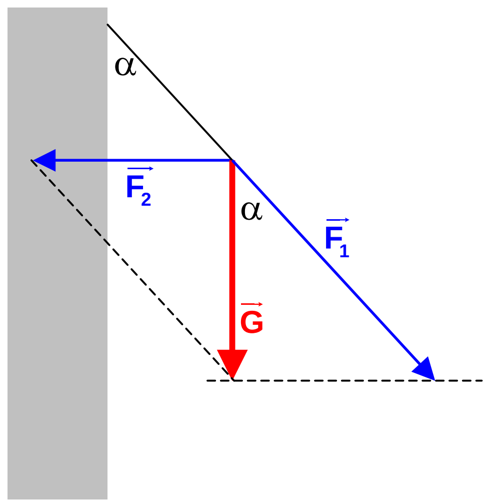
Hier gilt:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{G}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{G}{\cos\alpha}}$$

$\vec{F}_2$ ist eine **Druckkraft**, die über die Stange auf das Haus übertragen wird.

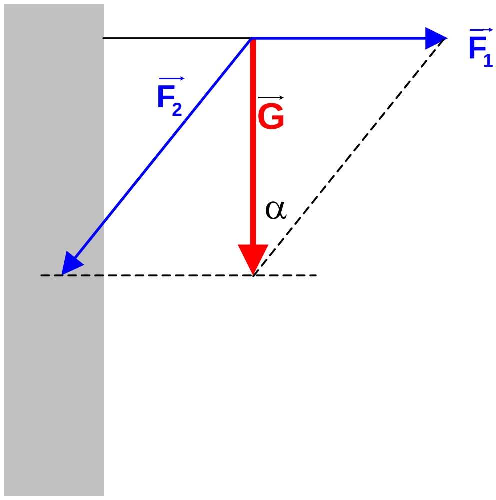
Hier gilt:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow F_2 = F_1 \cdot \tan\alpha}$$



Wenden wir uns nun dem 2. Typ zu und zeichnen Kräfte ein:

Die Gewichtskraft wirkt sich nun völlig anders aus.



$\vec{F}_1$ ist eine Zugkraft, die über das Seil an die Hauswand übertragen wird.

Hier gilt:

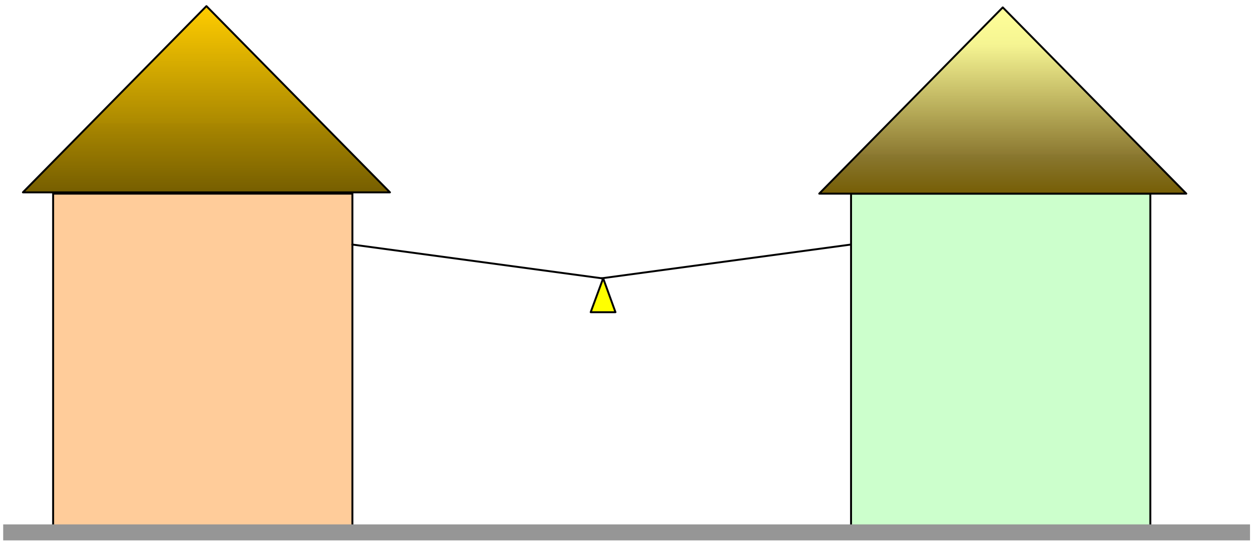
$$\tan\alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \tan\alpha$$

$\vec{F}_2$ ist eine Druckkraft, die über die schräge Stange auf die Hauswand übertragen wird

Hier gilt:

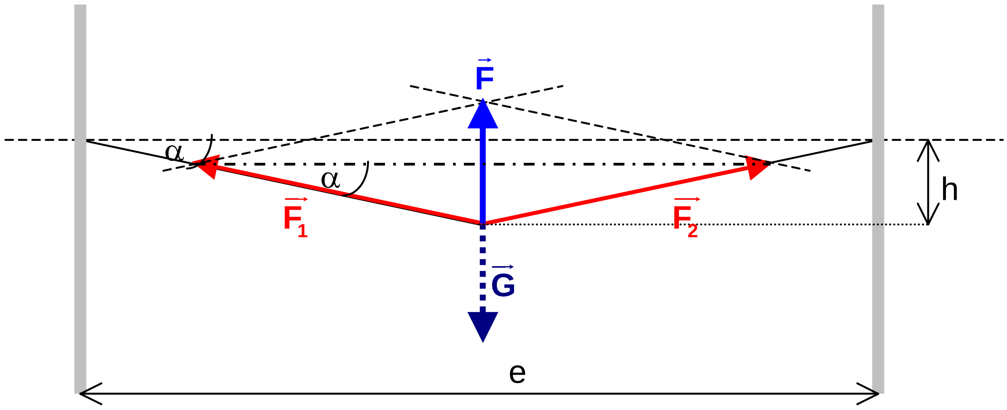
$$\cos\alpha = \frac{G}{F_2} \Rightarrow F_2 = \frac{G}{\cos\alpha}$$

Früher hat man Straßenlaternen mit zwei Seilen an zwei Häusern aufgehängt:



Wir wollen nun untersuchen, wie stark sich das Lampengewicht auf die Seile auswirkt, und wie dies von der Durchhängung der Lampe abhängt.

Dazu nun eine Skizze mit den Kräften.



Gehen wir der Reihe nach vor:

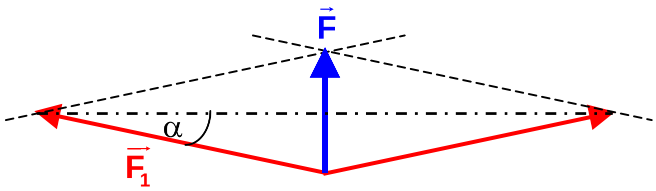
Die Gewichtskraft der Lampe kommt nicht zur Auswirkung, weil die Seile eine gleich große Gegenkraft $\vec{F}$ erzeugen. Dies geschieht über die beiden Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Aus Symmetriegründen sind beide Seilkräfte gleich große (wir wollen dies so haben!) und daher ist das Kräfteparallelogramm eine Raute, das durch die beiden Diagonalen in 4 gleich kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird.

Beginnen wir zuerst mit der Berechnung des Winkels α

Zwischen den Häusern: $\tan\alpha = \frac{h}{\frac{1}{2}e} = \frac{2h}{e} \Rightarrow \alpha = \ldots$ Den kennen wir nun also !

Nun eines der rechtwinkligen Dreiecke

Es gilt



$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}F}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{F}{2\cdot\sin\alpha}$$

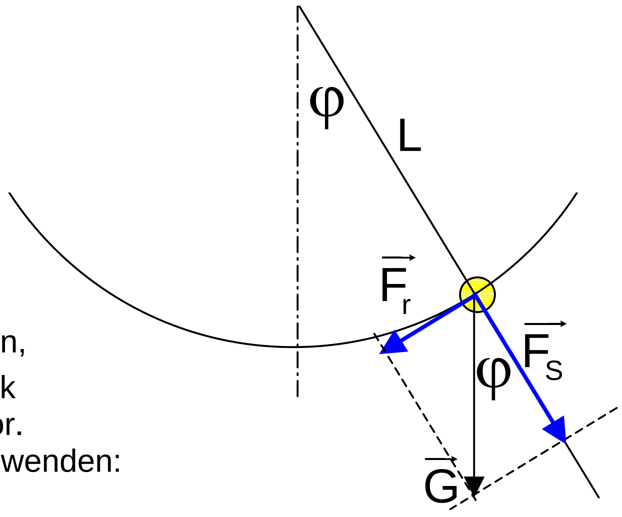
und weil F als Gegenkraft zu G gleich groß ist (und meistens eben G gegeben ist):

$$\boxed{F_1 = F_2 = \frac{G}{2\cdot\sin\alpha}}$$

2.3 Das schwingende Fadenpendel

Eine punktförmige Masse hänge an einer masselosen Schnur (dies alles ist nötig, um mit unseren idealisierten Physikformeln rechnen zu können!) und wird um einen bestimmten Winkel ausgelenkt. Läßt man es los, schwingt es zurück bis zum Tiefpunkt und lenkt dann nach der anderen Seite aus.

In jeder Phase dieser Schwingung ist die Gewichtskraft für zweierlei verantwortlich: Zum einen spannt es die Schnur (das tut die Seilkraft $\vec{F_S}$) und zum andern sorgt sie dafür, daß das Pendel abwärts beschleunigt und aufwärts gebremst wird. Diese Kraft heißt Rückstellkraft oder auch rücktreibende Kraft $\vec{F_r}$



Da $\vec{F_r}$ und $\vec{F_S}$ zueinander senkrecht wirken, wird das Kräfteparallelogramm zum Rechteck und es liegen zwei rechtwinklige Dreiecke vor. Daher können wir einfache Trigonometrie anwenden:

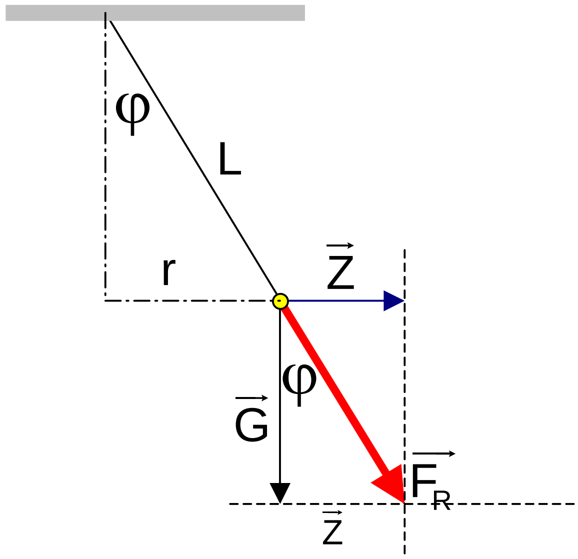
Seilkraft:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{F_S}{G} \Rightarrow F_S = G\cdot\cos\varphi}$$

Rückstellkraft:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{F_r}{G} \Rightarrow F_r = G\cdot\sin\varphi}$$

2.4 Das Kreispendel



Jetzt wird es sehr interessant, denn wir werden lernen, daß es zwei ganz verschiedene Betrachtungsweisen gibt, wenn man ein **im Kreis schwingendes** Fadenpendel betrachtet.

1. Überlegung:

Wir denken uns in den Massenpunkt hineinversetzt und spüren die Einwirkung zweier Kräfte: Zum einen die nach unten ziehende Gewichtskraft $\vec{G}$. Und mit ihr überlagert die Zentrifugalkraft $\vec{Z}$, denn wir führen ja eine Kreisbewegung durch.

Beide Kräfte überlagern sich zu einer resultierenden Kraftwirkung $\vec{F_R}$.

Diese Resultierende wirkt nun als Gesamtkraft auf die kreisende Masse und spannt somit die Schnur.

Weil Gewichtskraft und Zentrifugalkraft zueinander senkrecht wirken, wird das Kräfteparallelogramm zum Rechteck mit zwei rechtwinkligen Teildreiecken, so daß wir wieder einfache Trigonometrie anwenden können:

$$\sin\varphi = \frac{Z}{F_R} \quad \text{und} \quad \cos\varphi = \frac{G}{F_Z}$$

Viel interessanter ist hier der Zusammenhang zwischen $\vec{G}$ und $\vec{Z}$:

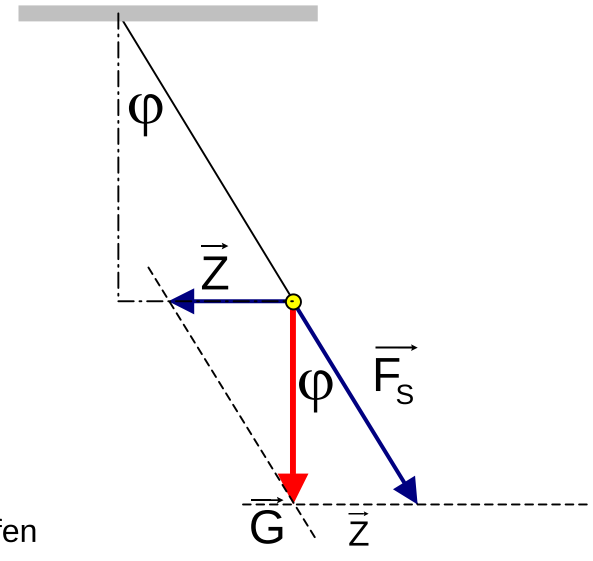
$$\tan\varphi = \frac{Z}{G}$$

Verwenden wir die Formeln $Z = \frac{mv^2}{r}$ und $G = mg$, dann folgt

$$\tan\varphi = \frac{mv^2}{r \cdot mg} \quad \text{bzw.} \quad \tan\varphi = \frac{v^2}{rg}$$

Damit lassen sich nun mehrere Aufgaben berechnen, was hier nicht zum Thema gehört.

2**. Überlegung:**



Wir schauen uns von außen das kreisende Pendel an und suchen nach Ursachen.

Zunächst einmal wirkt, nachdem das Pendel in seiner Kreisbahn angestoßen worden ist, außer der Gewichtskraft keine weitere Kraft auf den Körper. (Die vorhin zitierte Zentripetalkraft spürt ja nur der Mitfahrer als Ursache der dauernden Richtungsänderung).

Also muß die Gewichtskraft (wie bei der schiefen Ebene) Ursache für zwei Wirkungen sein.

1. Wirkung: Wir sehen ein straff gespanntes Seil, also wirkt auf dieses Seil eine Kraft $\vec{F}_S$, die Seilkraft.

2. Wirkung: Wer die Kreisbewegung gelernt hat, sollte wissen, daß ein Körper genau dann eine Kreisbewegung ausführt, wenn ständig senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung eine konstante Kraft $\vec{Z}$ wirkt. Sie heißt Radialkraft oder Zentipetalkraft. (Sie ist dem Betrag nach gleich groß wie die für den Mitfahrer spürbare Zentrifugalkraft.)

Daraus ergibt sich die in der Abbildung dargestellte Zerlegung der Gewichtskraft.

Da wieder zwei rechtwinklige Dreieck vorliegen, können wir so rechnen:

Zentripetalkraft:

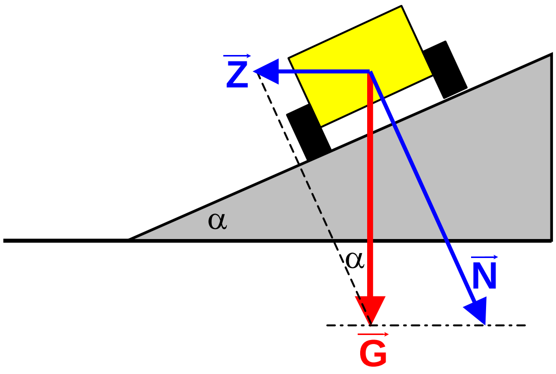
$$\tan\varphi = \frac{Z}{G} \Rightarrow Z = G \cdot \tan\varphi$$

Seilkraft:

$$\cos\varphi = \frac{G}{F_S} \Rightarrow F_S = \frac{G}{\cos\varphi}$$

Man lerne daraus: Die verschiedenen Standpunkte des mitfahrenden Beobachters bzw. des außen stehenden Beobachters führen zu unterschiedlichen Sichtweisen.

2.5 Die Kurvenfahrt



Wir nehmen die Position des außen stehenden Beobachters ein.
Er weiß, daß (abgesehen von einer möglichen Antriebskraft) nur die Gewichtskraft $\vec{G}$ wirkt.

Diese äußert sich jedoch in zwei Komponenten:

Die **Zentripetalkraft**
wirkt senkrecht zur Fahrtrichtung und ist Ursache der Kreisbewegung.

Die **Normalkraft**
drückt das Fahrzeug senkrecht gegen die Fahrbahn und sorgt somit für die notwendige Reibung, damit die Kurvenfahrt überhaupt möglich wird.

Da die resultierende Gewichtskraft senkrecht zur Zentripetalkraft wirkt, liegen zwei rechtwinklige Dreiecke vor, so daß die Trigonometrie dies liefert:

Zentripetalkraft:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{Z}{G} \Rightarrow Z = G \cdot \tan\alpha}$$

Normalkraft:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{G}{N} \Rightarrow N = \frac{G}{\cos\alpha}}$$